

Curso "Accións isométricas e espazos de cohomoxeneidade un"

Docente invitado: Alberto Rodríguez Vázquez (Université Libre de Bruxelles [ULB]).

Lugar: Facultade de Matemáticas (USC).

Data: 14 - 30 Xaneiro 2026.

- **Aula 9:** 14, 15, 16, 22 e 23 de xaneiro en horario de 11:30h a 13:00h.
- **Aula 10:**
 - 28 e 30 de xaneiro en horario de 11:30h a 13:00h.
 - 29 de xaneiro en horario de 10:30h a 12:00h.

Duración: 12 horas.

Abstract:

En matemáticas, as simetrías dun espazo codifícanse mediante a noción de grupo. Os espazos homoxéneos, aqueles nos que actúa un grupo de forma transitiva, permiten que moitos problemas xeométricos, formulados orixinalmente mediante ecuacións en derivadas parciais, sexan reducidos a problemas puramente alxébricos. Porén, ao debilitar lixeiramente o nivel de simetría, como no caso das accións de cohomoxeneidade un (aquelas con órbitas de codimensión un), pagamos o prezo de ter que tratar con EDOs. A pesares disto, esta filosofía ten resultado extraordinariamente frutífera na construción de espazos con propiedades xeométricas especiais como: curvatura positiva [3], holonomía especial [4], ou métricas Einstein [2, 5].

En concreto, este curso pretende ofrecer, en primeiro lugar, unha introdución ó estudo das accións isométricas, é dicir, aquelas que preservan distancias. En segundo lugar, analizaremos as consecuencias xeométricas e topolóxicas da existencia de accións de cohomoxeneidade un. Por último, presentaremos algúns exemplos de problemas xeométricos formulados en espazos de cohomoxeneidade un, que poden ser resoltos mediante EDOs.

De xeito máis detallado os contidos do curso serían:

1. Accións de grupos de Lie: accións propias, espazo de órbitas, accións isométricas.
2. Espazos homoxéneos: campos de vectores fundamentais, a representación de isotropía, conexións e curvatura.
3. O teorema da slice e algunhas das súas consecuencias como: o teorema da órbita principal ou criterios suficiente para a minimalidade de órbitas.
4. A topoloxía das variedades de cohomoxeneidade un: fibrados de discos, conexións de órbitas, grupo fundamental e característica de Euler.
5. A xeometría das variedades de cohomoxeneidade un: conexións e curvatura e xeometría extrínseca das órbitas.
6. Condicións de suavidade en métricas de cohomoxeneidade un e EDOs asociadas a problemas xeométricos.

Non se requiren coñecementos previos específicos, agás unha certa familiaridade coa teoría de grupos de Lie e variedades diferenciábeis. Como referencias básica para o curso seguiremos o libro [1], o artigo [6] e algunhas partes de [3].

Referencias:

- [1] M. Alexandrino, R. Bettiol, Lie groups and geometric aspects of isometric actions. Springer, Cham, 2015. x+213 pp.
- [2] C. Böhm, Inhomogeneous Einstein metrics on low-dimensional spheres and other low-dimensional spaces, Invent. Math. 134 (1998), no. 1, 145–176.
- [3] K. Grove, W. Ziller, Cohomogeneity one manifolds with positive Ricci curvature, Invent. Math. 149 (2002), no. 3, 619–646.
- [4] L. Foscolo, M. Haskins, New G2-holonomy cones and exotic nearly Kähler structures on S^6 and $S^3 \times S^3$, Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 1, 59–130.
- [5] J. Nienhaus, M. Wink, Einstein metrics on the ten-sphere, to appear in J. Eur. Math. Soc.,
- [6] L. Verdiani, W. Ziller, Smoothness conditions in cohomogeneity one manifolds, Transform. Groups 27 (2022), no. 1, 311–342.