CONJUNTOS DE PERIODOS DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS DE UNA SUPERFICIE DE RIEMANN

JAUME LLIBRE

Sea S un espacio topológico y $f : S \to S$ una función contínua. El par (S, f) se denomina un *sistema dinámico discreto*. Estudiar la dinámica de este sistema consiste en estudiar sus órbitas, esto es, las sucesiones

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots\},$$

para cualquier punto $x \in S$ donde $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$.

Un punto $x \in S$ es *periódico de período* n si $f^n(x) = x$ y $f^l(x) \neq x$ si $l = 1, \dots, n-1$. La órbita de un punto periódico es finita y tiene longitud n. Denotamos por $\mathrm{Per}(f)$ al *conjunto de períodos* de todas las órbitas periódicas de f.

El conjunto de períodos $\mathrm{Per}(f)$ es uno de los invariantes clásicos en el estudio de la dinámica de una función. Pero el conjunto $\mathrm{Per}(f)$ no es estable en general, esto es $\mathrm{Per}(f)$ suele cambiar cuando cambiamos contínuamente la función f. En particular $\mathrm{Per}(f)$ no se conserva por una homotopía de la función f. Esto hace que sea difícil analizar el conjunto $\mathrm{Per}(f)$ mediante herramientas de la topología algebraica. Para evitar esta dificultad consideramos el *conjunto de períodos homotópicos* de f:

$$\mathrm{HPer}(f) = \bigcap_{g \sim f} \mathrm{Per}(g),$$

donde $g : S \to S$ recorre todas las funciones continuas homotópicas a f.

Sea $\mathbb{S}^1$ el circulo y $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una función contínua. Sabemos que si f y g son dos funciones continuas del circulo, entonces f and g son homotópicas (esto es $f \sim g$) si y solo si f y g tienen el mismo grado.

Para las funciones continuas del circulo se ha caracterizado completamente el conjunto de períodos homotópicos en función del grado de la función.

Theorem 1. *Sea f una función contínua del circulo de grado d.*

(a) *Si $d = 1$, entonces* $\mathrm{HPer}(f) = \emptyset$.
(b) *Si $d \in \{-1, 0\}$, entonces* $\mathrm{HPer}(f) = \{1\}$.
(c) *Si $d = -2$, entonces* $\mathrm{HPer}(f) = \mathbb{N} \setminus \{2\}$.
(d) *Si $d \notin \{-2, -1, 0, 1\}$, entonces* $\mathrm{HPer}(f) = \mathbb{N}$.

El circulo es la única variedad real de dimensión 1, conexa, compacta y sin frontera.

En esta conferencia queremos estudiar como se extiende el Teorema 1 que caracteriza los conjuntos de períodos homotópicos de las funciones continuas del circulo para obtener la caracterización del conjunto de períodos homotópicos de las funciones holomorfas de las variedades complejas de dimensión 1 (o *superficies de Riemann*), conexas, compactas y sin frontera.

Para poder hacer esta caracterización tendremos que repasar brevemente cuales son las superficies de Riemann, conexas, compactas y sin frontera, a continuación determinar las funciones holomorfas sobre estas superficies, y finalmente estudiar sus conjuntos de períodos homotópicos. Para realizar este último estudio nos hará falta utilizar los números de Lefschetz de las funciones holomorfas de las superficies de Riemann conexas, compactas y sin frontera.

Los números de Lefschetz de una función sobre una superficie de Riemann S conexa, compacta y sin frontera se calculan a partir de la acción de esta función sobre los grupos de homologia de S.

References

[1] Ll. Alsedà, J. Llibre and M. Misiurewicz, *Combinatorial Dynamics and Entropy in dimension one (Second Edition), Advanced Series in Nonlinear Dynamics*, World Scientific, Singapore, 2000.

[2] R. F. Brown, *The Lefschetz fixed point theorem*, Scott, Foresman and Company, Glenview, IL, 1971.

[3] A. Dold, *Fixed point indices of iterated maps*, Invent. math. **74** (1983), 419–435.

[4] D. B. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115**, (1966), 83–107.

[5] N. Fagella and J. Llibre, *Periodic points of holomorphic maps via Lefstchetz numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 4711–4730.

[6] H. M. Farkas and K. Kra, *Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics **71**, Springer–Verlag, New York, 1980.

[7] J. Jezierski and W. Marzantowicz, *Homotopy methods in topological fixed and periodic points theory*, Topological Fixed Point Theory and Its Applications **3**, Springer, Dordrecht, 2006.

[8] J. Llibre, *Lefschetz numbers for periodic points*, Contemporary Math. **152** (1993), 215–227.

[9] J. Llibre and W. Marzantowicz, *Periods of holomorphic maps on surfaces*, preprint, 2007.

[10] W. P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 417–431.

[1] Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Barcelona, Catalonia, Spain

E-mail address: jllibre@mat.uab.cat