Dynamiques Source-Puits et Flots transversalement projectifs

G. Hector

9 mai 2008

Résumé

A celebrated theorem by G. Reeb claims that any flow Z on a closed manifold all of whose limit sets are source or sink singularities, is indeed a north-south flow on a sphere. Here we study the analogous situation defined by a flow Z without singularities whose limit sets are closed orbits of type source or sink. We call theses flows "Dynamiques Source-Puits" (or Source-Sink dynamics) and give a complete description of them.

In the second part of the paper, we look for "transverse geometric structures" of these flows. More precisely, we show that, up to topological conjugation, they split into two families :
a) either Z is a transversely projective (possibly transversely affine) flow,
b) or it does not admit any transversely homogeneous structure at all.

Résumé

Un théorème célèbre de G. Reeb stipule qu'un flot Z sur une variété fermée M dont tout ensemble-limite est une singularité de type source ou puits est en fait un flot nord-sud sur une sphère.

Dans un premier temps, nous nous proposons d'étudier la situation analogue obtenue en supposant que Z est sans singularité et que tout ensemble-limite est une orbite fermée de type source ou de type puits. C'est ce que nous appellerons une **Dynamique Source-Puits** (ou **Dynamique SP**). Nous montrons essentiellement que si $\pi_1(M)$ est infini et $dim(M) = m \geq 4$, alors

i) Z est un flot **développable**, défini par une submersion équivariante (voir **??**),

ii) M est homéomorphe (mais non difféomorphe en général) à la variété produit $\mathbb{S}^{m-1} \times \mathbb{S}^1$ et Z a exactement deux orbites fermées une source et un puits,

iii) à conjuguaison topologique près, ces flots se répartissent en deux familles appelées **suspensions** et **modèles**, chacune d'elles comportant exactement deux classes d'isotopie.

Le cas de la dimension 3 est particulier, en effet il existe des flots SP sur la sphère $\mathbb{S}^3$ et les espaces lenticulaires qui ne sont pas de type développable mais pour lesquels on a à nouveau deux classes d'isotopie topologique. Enfin nous décrirons rapidement la classification de ces flots à conjuguaison et isotopie différentiables près, classification beaucoup plus subtile puisqu'elle fait intervenir des notions et résultats fins de topologie différentielle comme les sphères

exotiques de Milnor, le théorème du h-cobordisme ou celui de la pseudo-isotopie etc...

La deuxième partie du travail, consistera à montrer que ces dynamiques SP se présentent de façon naturelle. En effet tout flot **transversalement affine** est une Dynamique SP dès que son groupe d'holonomie globale, qui est toujours infini, est **cyclique**. Nous obtenons donc une classification complète de cette famille de flots : tout flot TA cyclique est de type SP et rentre dans la deuxième catégorie, celle des modèles et cela en toute dimension.

Cette seconde partie vient en complément du gros travail de S. Matsumoto sur les Flots Transversalement Affines en dimension 3 mais ne suffit malheureusement pas pour terminer la classification de ces flots.

Notre dernier objectif est la recherche d'une **structure géométrique transverse** pour les flots SP. L'étude des flots TAC montre que tout modèle de flot SP est C^0-conjugué à un tel flot TA et pour obtenir une réponse complète à cette question, il nous restera simplement à voir que :

a) tout flot SP est C^0-conjugué à un flot **transversalement projectif** pourvu que le groupe fondamental de la variété soit infini,

b) si le groupe fondamental de M est fini, alors la variété M est de dimension 3, c'est la sphère $\mathbb{S}^3$ ou un espace lenticulaire et le flot n'est conjugué à aucun flot **transversalement homogène**.