UNE APPLICATION DE LA SUITE SPECTRALE DE GROTHENDIECK A LA COHOMOLOGIE DES FEUILLETAGES.

Enrique Macías

CLASSIFICATION AMS: 57 R 30, 18 G 40

RESUME: Soient g une algèbre de Lie et A un faisceau de g-modules sur une variété différentiable M. En partant d'un résultat de Grothendieck on obtient une suite spectrale, avec $E_2^{a,u} = H^a(g;H^u(M;A))$, qui aboutit au foncteur dérivé à droite du foncteur Γ_{inv} = invariants du g-module des sections globales.

Lorsque on a défini sur M un feuilletage différentiable F, on considérent le faisceau P^o des germes des fonctions à valeurs réels qui sont constantes le long des feuilles, et l'algèbre de Lie g des transformations infinitésimales du feuilletage modulo les champs de vecteurs tangents à F. On décrit alors de façon explicite l'action de g sur la "cohomologie feuilletée" $H^u(M;P^o)$.

Pour finir, on étudie le rapport de cette suite spectrale avec celle définie à partir du faisceau différentiel des germes des formes basiques, dont l'aboutissement est la cohomologie de De Rham de M.

1. PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES

Nous rappelons d'abord quelques résultats utiles par la suite. M sera une variété différentiable paracompacte séparée, S une R-algèbre et h_S^M la catégorie des faisceaux de S-modules sur M.

Le foncteur Γ_S: $h_S^M \to mod_S$ des sections globales est l'adjoint à droite du foncteur Mx- qui associe à chaque S-module le correspondant faisceau constant. Si $A \in h_{\mathbb{R}}^M$, $H^u(M;A)$ est par définition $R^u\Gamma_{\mathbb{R}}(A)$, le u-ième foncteur dérivé à droite de $\Gamma_{\mathbb{R}}$. |1|

SUITE SPECTRALE DE GROTHENDIECK |4|: Soient $a \xrightarrow{F} b \xrightarrow{G} c$ deux foncteurs additifs exacts à gauche, les catégories supposées abéliennes et possedant suffisamment d'objects injectifs. Soit $R^aG(F(I)) = 0$ pour $a>0$, I injectif (par exemple si F admet un adjoint à gauche, d'où F(I) injectif). Alors il existe, pour chaque object A dans a, une suite spectrale

$$E_2^{a,u} = R^aG(R^uF(A)) \Longrightarrow R^{a+u}(G\circ F)(A) \qquad (*)$$

Puisque les foncteurs d'oubli U: $mod_S \to mod_{\mathbb{R}}$, $h_S^M \to h_{\mathbb{R}}^M$

sont exacts et adjoints à droite de $-\otimes_{\mathbb{R}} S$, $-\otimes(M\times S)$ respect., on déduit aisément de (*) que les espaces vectoriels $UR^u\Gamma_S(A)$ et $R^u\Gamma_{\mathbb{R}}(UA)$ coïncident pour tout $A\in h_S^M$.

En particulier, soit $S=\hat{g}$ l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie g. Si $A\in mod_{\hat{g}}$, on définit $H^a(g;A)$ par $R^a INV(A)$, où $INV(A) = H^0(g;A) = Hom_{\hat{g}}(\mathbb{R},A)$ est l'espace des invariants de l'action de g sur A. Ce foncteur est l'adjoint à droite du foncteur exact T qui considére chaque $\mathbb{R}$-module comme g-module trivial. En prenant $F=\Gamma_{\hat{g}}: h_{\hat{g}}^M \to mod_{\hat{g}}$, $G=INV: mod_{\hat{g}} \to mod_{\mathbb{R}}$, la suite de (*) nous donne

$$E_2^{a,u} = H^a(g;H^u(M;A)) \Longrightarrow R^{a+u}\Gamma_{inv}(A) \qquad (**)$$

où on appelle $\Gamma_{inv} = INV\circ\Gamma_{\hat{g}}$.

2. FEUILLETAGES

Considérons à présent un feuilletage différentiable F de codimension q sur la variété M.

On note $\chi(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents, $\chi(F)$ la sous-algèbre des champs tangents au feuilletage, et $\chi(M,F)$ son normalisateur, c'est à dire l'algèbre des champs "feuilletés" ou transformations infinitésimales de F. |7|

Une a-forme différentielle $\omega\in\Omega^a(M)$, $0\leq a\leq q$, est dite "basique" si $i_X\omega=0$, $i_X d\omega=0$ pour les $X\in\chi(F)$. Puisque le faisceau différentiel $(P^\cdot,d)$ des germes des formes basiques est une résolution du faisceau constant $\mathbb{R}_M$, d'habitude on associe à F la suite spectrale |5|, |8|

$$_\infty E_2^{a,u} = H^a(H^u(M;P^\cdot), d_1) \Longrightarrow H^{a+u}(M,\mathbb{R}).$$

Toute métrique riemannienne sur M induit une décomposition orthogonale $TM = TF\oplus NF$ du fibré tangent, de façon que chaque forme $\omega\in\Omega^r(M)$ s'écrit comme $\Sigma_{a+u=r}\omega^{a,u}$ avec $\omega^{a,u}\in\Omega^{a,u} = \Lambda^a(NF^*)\otimes\Lambda^u(TF^*)$, et la différentielle extérieure se décompose en trois operateurs $d = d_F + d_N + \delta$ de bidegrés (0,1), (1,0) et (2,-1) respectivement. Si on note $Z^{a,u}$, $B^{a,u+1}$ le noyeau et l'image de d_F: $\Omega^{a,u} \to \Omega^{a,u+1}$, on a $H^u(M;P^a) = Z^{a,u}/B^{a,u}$, tandis que c'est d_N qui induit le morphisme d_1.

Soit g l'algèbre de Lie $\chi(M,F)/\chi(F)$. Le faisceau P^o des germes des fonctions C^∞ de M dans R qui sont constantes le long des feuilles appartient à h_g^M, l'action de $\overline{X} \in g$ sur f étant donnée par $\theta_{\overline{X}} f = i_X df = Xf$. Les $H^u(M;P^o)$ sont les groupes de "cohomologie feuilletée" H_F^u |2|, et la suite spectrale (**) reste alors

$$E_2^{a,u} = H^a(g;H_F^u) \Longrightarrow R^{a+u}\Gamma_{inv}(P^o) \qquad (***)$$

On peut rendre explicite l'action de g sur H_F^u. Si NX est la partie normale du champ $X \in \chi(M)$, mettons $\theta_{\overline{X}}\omega = i_{NX}d_N\omega = (L_X\omega)^{0,u}$, pour $\omega \in \Omega^{0,u}$, $\overline{X} \in g$. Cette action est bien définie en cohomologie parceque d_F commute avec d_N et i_{NX}; et θ induit un homomorphisme d'algèbres de Lie en vertu de la formule

$$[\theta_{\overline{X}},\theta_{\overline{Y}}]\omega - \theta_{[\overline{X},\overline{Y}]}\omega = i_{[NX,NY]}d_F\omega + d_F i_{T(\overline{X},\overline{Y})}\omega ,$$

où $T(\overline{X},\overline{Y}) = [NX,NY]-N[X,Y] \in \chi(F)$.

Pour calculer les $H^a(g;H_F^u)$ il suffit de prendre le complexe des applications multilinéaires alternées de g dans H_F^u |3|; le morphisme $\xi: Z^{a,u}/B^{a,u} \to \mathrm{alt}(g^a,H_F^u)$ avec

$$\xi(|\omega|)(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_a) = |i_{NX_a}\cdots i_{NX_1}\omega|$$

commute avec les différentielles et donne alors un morphisme

$$\xi : {}_\infty E_2^{a,u} \longrightarrow E_2^{a,u}$$

Lorsque F est un feuilletage transversalement parallelisable sur une variété compacte, ξ est un isomorphisme |6|, donc $R^a\Gamma_{inv}(P^o) = H_{DR}^a(M)$.

REFERENCES

1. BREDON, G.E. Sheaf Theory. McGraw-Hill, New York, 1967.
2. EL KACIMI-ALAOUI, A. Sur la cohomologie feuilletée, Compositio Mathematica 49 (1983), 195-215.
3. GREUB, W.; HALPERIN, S.; VANSTONE, R. Connections, curvature and cohomology. Academic Press, 1976.
4. HILTON, P.J.; STAMBACH, U. A course in Homological Algebra. Springer-Verlag, New York, 1971.
5. MASA VAZQUEZ, J.M. Sucesión espectral de cohomología asociada a variedades foliadas. Aplicaciones. Publ. Dpto. Geom. y Top., nº19, Santiago, 1973.
6. MASA, X. Cohomology of Lie foliations, V Int. Colloquium of Diff. Geom., Santiago de Compostela, 1984.
7. MOLINO, P. Géométrie globale des feuilletages riemanniennes, Proc. Kon. Nederl. Akad., Ser.A, 1, 85 (1982), 45-76.
8. SARKARIA. The De Rham cohomology of foliated manifolds, Thesis SUNY, Stone Brook, 1974.

Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Santiago de Compostela

Colegio Universitario
27.000 LUGO (Espagne)