Actas IX Jornadas Matemáticas
Hispano-Lusas, Vol. II
Universidad de Salamanca, 1982

COHOMOLOGIAS DIFERENCIABLE, CONTINUA Y DISCRETA ASOCIADAS A UNA VARIEDAD FOLIADA

Enrique MACIAS y Xosé MASA

Departamento de Matemáticas
Colexio Universitario de Lugo

Departamento de Xeometría e
Topoloxía. Fac. Matemáticas

Universidade de Santiago

Se conocen varias cohomologías asociadas a variedades foliadas. Por ejemplo, partiendo del complejo de de Rham de la variedad se define la cohomología diferenciable. Partiendo de la construcción de cadenas cúbicas singulares adaptadas a la estructura se obtiene la cohomología discreta. Adoptando el punto de vista de la doble estructura topológica de la variedad foliada se llega a la cohomología continua.

En esta comunicación se presenta un tratamiento unificado de estas tres cohomologías, extendiendo su definición en el caso de cohomología continua, de forma que se obtengan en los tres casos sucesiones espectrales convergentes a la cohomología real de la variedad. Se parte de la consideración de tres haces diferenciales, P^*_{dif}, P^*_{cont}, P^*_d , cada uno subhaz del siguiente. En cada caso, P^0 es el haz de funciones diferenciables, continuas o arbitrarias, respectivamente, localmente constantes sobre las hojas.

Se demuestra su invariancia por homotopía en la categoría de espacios con dos topologías y la coincidencia de las tres sucesiones espectrales en el caso de fibrados sobre variedades de Satake.

M será una variedad diferenciable, C^∞, n-dimensional, F una foliación C^∞ de dimensión q y codimensión p, $0\leq a,b,.. \leq p$ $0\leq u,v,.. \leq q$.

1.- P^0_{dif} es el haz de gérmenes de funciones diferenciables localmente constantes en las hojas. $P^*_{dif} = \Sigma\, P^a_{dif}$ es el haz diferencial engendrado por las funciones de P^0_{dif} y sus diferenciales. Define una resolución del haz constamte $\underline{\mathbb{R}}_M$ y una sucesión espectral

$$_{dif}E_2^{a,u} = H^a H^u(M,\ P^*_{dif}) \Longrightarrow H^{a+u}_{DR}(M)$$

2.- El haz P^0_d es el haz de gérmenes de funciones arbitrarias con valores reales, localmente constantes en las hojas.

Llamaremos símplice singular diferenciable transverso a F a un símplice diferenciable $\sigma : \Delta^a \longrightarrow M$ tal que

$$d\sigma(T_x\Delta^a) \cap T_{\sigma(x)}F = 0$$

para todo x de Δ^a. Para cada abierto U en M, sean $S_a(U)$ el conjunto de a-símplices transversos y $F(S_a(U), \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones reales sobre $S_a(U)$. Diremos que dos a-símplices transversos σ_0, σ_1 son F-homótopos, $\sigma_0 \underset{F}{\simeq} \sigma_1$, si existe una función C^∞ , σ , de $\Delta^a x I$ en U, tal que

1) cada $\sigma_t : \Delta^a \longrightarrow U$ pertenezca a $S_a(U)$, y

2) para cada z, $\sigma_z : I \longrightarrow U$ sea tangente a F.

Se define ahora $P^a_d(U)$ por: $f \in P^a_d(U) \Leftrightarrow \left\{\sigma_0 \underset{F}{\simeq} \sigma_1 \Rightarrow f\sigma_0 = f\sigma_1\right\}$.
La restricción de la traspuesta de $\partial : S_{a+1}(U) \longrightarrow S_a(U)$ define un morfismo

$$P^a_d(U) \longrightarrow P^{a+1}_d(U)$$

que dá a P^*_d una estructura de haz diferencial, resolución de $\underline{\mathbb{R}}_M$, y la correspondiente sucesión espectral

$$_dE_2^{a,u} = H^a H^u(M,\ P^*_d) \Longrightarrow H^{a+u}(M;\mathbb{R})$$

Es la situación estudiada por Shikata utilizando cubos singulares adaptados a la foliación ("On a homology theory associated to foliations" Nagoya Math. J. 38 (1970) 53-61).

3.- P^0_{cont} es el haz de funciones reales continuas, localmente constantes sobre las hojas. La cohomología con valores en este haz ha sido estudiada por Mostow ("Continuous cohomology of spaces with two topologies" Memoirs of the Amer. Math. Soc. nº 175, 1976).

Consideremos, ahora, sobre $S_a(U)$ la topología compacto-abierto y el subconjunto de $F(S_a(U), \mathbb{R})$, $Map(S_a(U),\mathbb{R})$ de las funciones continuas. El operador frontera es continuo, y su traspuesta define una función $Map(S_a(U),\mathbb{R}) \longrightarrow Map(S_{a+1}(U),\mathbb{R})$.

Sea $P^a_{cont}(U) = P^a_d(U) \cap Map(S_a(U),\mathbb{R})$. Se obtiene un haz diferencial P^*_{cont}, resolución de $\underline{\mathbb{R}}_M$, y una sucesión espectral

$$_{cont}E_2^{a,u} = H^a H^u(M, P^*_{cont}) \Longrightarrow H^{a+u}(M,\mathbb{R})$$

4.- P_{cont} es un subhaz de P_d. Se puede considerar P_{dif} como un subhaz de P_{cont}.

En efecto, la aplicación $\kappa_U : \Omega(U) \longrightarrow Map(S_a(U),\mathbb{R})$ dada por

$$\kappa_U(\omega)\sigma = \int_\sigma \omega .$$

en donde $\Omega(U)$ son las formas diferenciales sobre U, define un morfismo $\kappa : P_{dif} \longrightarrow P_{cont}$ compatible con las diferenciales. Existen, en consecuencia, morfismos

$$\begin{array}{ccccc} {}_{dif}E_2^{a,u} & \longrightarrow & {}_{cont}E_2^{a,u} & \longrightarrow & {}_{d}E_2^{a,u} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ H^{a+u}_{DR}(M) & \cong & H^{a+u}(M,\mathbb{R}) & = & H^{a+u}(M,\mathbb{R}) \end{array}$$

5.- Estas cohomologías son bastante rígidas: por ejemplo, cada clase de homotopía de foliaciones orientadas sobre el Toro contiene foliaciones con sucesiones espectrales diferentes. Tambien, existen foliaciones topológicamente equivalentes con cohomologías distintas.

El resultado mas general que podemos establecer es el siguiente: estas cohomologías son homotópicamente invariantes en la categoría de espacios con dos topologías. Es decir, si M y M' son variedades con foliaciones de codimensión p, F y F', y si f y g son funciones de M en M' compatibles con las foliaciones, si sobre MxI se considera la foliación producto, si entre f y g existe una homotopía foliada h: MxI $\longrightarrow$ M', entonces f y g inducen los mismos homomorfismos en cohomología.

6.- Ejemplos. a.- Para el Toro foliado con rectas de pendiente irracional, se tiene

$${}_{dif}E_2^{1,0} \cong \mathbb{R} \cong {}_{dif}E_2^{0,1} \;;\quad {}_{d}E_2^{1,0} \cong \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \;,\quad {}_{d}E_2^{0,1} = 0 \;.$$

b.- Sea M $\xrightarrow{\pi}$ V un fibrado sobre una variedad de Sataké. Tomando soportes compactos, las tres sucesiones espectrales coinciden a partir del segundo término.

En efecto, consideremos sobre V los haces Ω_V^* , S_V^* , C_V^* de las formas diferenciales, cocadenas singulares sobre los símplices diferenciables y cocadenas continuas relativamente a la topología compacto-abierto, respectivamente. Los haces P_{dif}^*, P_d^* y P_{cont}^* son las imágenes recíprocas de estos haces.

Ahora, utilizando la sucesión espectral de Leray conveniente, se obtiene

$$H_c^u(M,\ P_{dif}^a) \cong \Omega_c^a(V,\ H_c^u(\pi,\mathbb{R}))$$

$$H_c^u(M,\ P_{cont}^a) \cong C_c^a(V,\ H_c^u(\pi,\mathbb{R}))$$

$$H_c^u(M,\ P_d^a\ ) \cong S_c^a(V,\ H_c^u(\pi,\mathbb{R}))$$

Definen tres resoluciones finas del haz $H_c^a(\pi,\mathbb{R})$, haz derivado asociado a π. De aqui se deduce el resultado.
