Actas IX Jornadas Matemáticas
Hispano-Lusas, Vol. II
Universidad de Salamanca, 1982

COHOMOLOGIA DIFERENCIABLE EN VARIEDADES FOLIADAS

Enrique Macías y Xosé Masa

Departamento de Matemáticas. Colegio Universitario de Lugo.
Departamento de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas.
Universidad de Santiago.

En una variedad diferenciable M de dimensión n dotada de una foliación diferenciable $\mathcal{F}$ de dimensión p, se consideran los haces $\mathcal{P}^a$ $(0 \leq a \leq n-p=q)$ de gémenes de a-formas foliadas $(i_X\omega = 0,\ i_X d\omega = 0$ si $X \in T\mathcal{F}$). El haz diferencial ($\mathcal{P}^*$,d) es una resolución del haz constante $\mathbb{R}_M$, y define una sucesión espectral [3]

$$E_2^{a,u} = H^a H^u(M; \mathcal{P}^*) \Longrightarrow H_{DR}^{a+u}(M)$$

Dotando a M de una métrica de Riemann se obtiene una bigraduación del haz de gérmenes de formas diferenciales sobre M, de manera que cada forma $\omega \in \Omega^i(M)$ se escribe como suma de formas de tipo puro $\omega^{a,u} \in \Lambda^{a,u} = \Omega^{a,u}(M)$, y la diferencial exterior se descompone en tres operadores $d = d_{\mathcal{F}} + d_N + \delta$ de bigrados (0,1), (1,0) y (2,-1) respectivamente.

Se tiene que $(\Omega^{a,*}, d_{\mathcal{F}})$ es una resolución fina del haz $\mathcal{P}^a$ y en consecuencia los grupos de cohomología diferenciable $E_1^{a,u} = H^u(M; \mathcal{P}^a)$ vienen dados por

$$H^u(\Omega^{a,*}(M), d_{\mathcal{F}}) = Z^{a,u}/B^{a,u}$$

donde llamamos $Z^{a,u} = \mathrm{Ker}(d_{\mathcal{F}} : \Lambda^{a,u} \longrightarrow \Lambda^{a,u+1})$ y $B^{a,u} = \mathrm{Im}(d_{\mathcal{F}} : \Lambda^{a,u-1} \longrightarrow \Lambda^{a,u})$.

Diremos que una forma $\omega \in \Omega^{p+a}(M)$ es $\mathcal{F}$-trivial sii $\omega(Y_J, X_1, \ldots, X_p) = 0$ cuando los X_i son tangentes a $\mathcal{F}$, y es fácil ver que el espacio $A_{\mathcal{F}}^{p+a}(M)$ de $(p+a)$-formas $\mathcal{F}$-triviales es precisamente $\Lambda^{p+a,0} + \ldots + \Lambda^{a+1,p-1}$.

En [2] Haefliger considera el complejo $(\Omega_c^*(\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}), d)$ de formas con soporte compacto en una transversal completa T que son invariantes por el pseudogrupo de holonomía inducido por $\mathcal{F}$ en T. Los grupos $\Omega_c^a(\mathrm{Tr}\,\mathcal{F})$ no dependen de T y son isomorfos a

$$\frac{\Omega^{p+a}(M)}{A_{\mathcal{F}}^{p+a}(M) + dA_{\mathcal{F}}^{p+a-1}(M)}$$

si se toman formas con soporte compacto.

<u>Prop.-</u> $\Omega_c^a(\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}) \cong H_c^p(M; \mathcal{P}^a)$, $p = \dim \mathcal{F}$.

(Haefliger ha probado este resultado para $a = 0$)

Si $\omega \in A_{\mathcal{F}}^{p+a-1}(M)$ entonces

$d(\omega - \omega^{a,p-1}) + (d - d_{\mathcal{F}})\omega^{a,p-1} \in A_{\mathcal{F}}^{p+a}(M)$, así que

$A_{\mathcal{F}}^{p+a}(M) + dA_{\mathcal{F}}^{p+a-1}(M) = A_{\mathcal{F}}^{p+a}(M) + B^{a,p}$, y por tanto

$$\Omega_c^a(\mathrm{Tr}\,\mathcal{F}) = \frac{\Lambda^{p+a,0} + \ldots + \Lambda^{a,p}}{\Lambda^{p+a,0} + \ldots + B^{a,p}} = \frac{\Lambda^{a,p}}{B^{a,p}} = H_c^p(M; \mathcal{P}^a)$$

Rummler [4] ha definido los grupos de cohomología de de Rham $\mathcal{F}$-relativa $H^{p+a}(M/\mathcal{F})$ como los del complejo $(A^*(M/\mathcal{F}), d)$ donde $A^r(M/\mathcal{F}) = 0$ si $r < p$ y

$$A^{p+a}(M/\mathcal{F}) = \frac{\Omega^{p+a}(M)}{A_{\mathcal{F}}^{p+a}(M) \cap d^{-1}A_{\mathcal{F}}^{p+a+1}(M)}$$

Nosotros demostraremos que se tiene

<u>Prop.-</u> $H^{p+a}(M/\mathcal{F}) \cong E_2^{a,p}$, $p = \dim \mathcal{F}$.

Es inmediato comprobar que $\omega \in A_{\mathcal{F}}^{p+a}(M) \cap d^{-1}A_{\mathcal{F}}^{p+a+1}(M)$ sii $\omega^{a,p} = 0$ y $(d\omega)^{a+1,p} = d_{\mathcal{F}}\omega^{a+1,p-1} = 0$, luego

$$A^{p+a}(M/\mathcal{F}) = \frac{\Lambda^{p+a,0} + \dots + \Lambda^{a+1,p-1} + \Lambda^{a,p}}{\Lambda^{p+a,0} + \dots + Z^{a+1,p-1}} \cong$$

$$\cong \Lambda^{a,p} \oplus \frac{\Lambda^{a+1,p-1}}{Z^{a+1,p-1}} \cong \Lambda^{a,p} \oplus B^{a+1,p}$$

y el complejo de Rummler es isomorfo al complejo (R^a,ξ) donde $R^a = \Lambda^{a,p} \oplus B^{a+1,p}$ y $\xi\colon R^a \longrightarrow R^{a+1}$ viene dada por

$$\xi(\omega^{a,p}, \omega^{a+1,p}) = (d_N\omega^{a,p} + \omega^{a+1,p} , -d_N(d_N\omega^{a,p} + \omega^{a+1,p}))$$

Para probar que el isomorfismo $A^{p+a}(M/\mathcal{F}) \longmapsto R^a$, $[\omega] \longrightarrow (\omega^{a,p}, d_{\mathcal{F}}\omega^{a+1,p-1})$ conmuta con los operadores frontera deben tenerse en cuenta las relaciones: $d_{\mathcal{F}}d_N + d_Nd_{\mathcal{F}} = 0$, $-d_N^2\omega^{a,p} = d_{\mathcal{F}}\delta\omega^{a,p}$.

Por otra parte es $H^p(M;\mathcal{P}^a) = \Lambda^{a,p}/B^{a,p}$ y definimos un homomorfismo sobreyectivo de complejos $\mu\colon (R^*,\xi) \longrightarrow (H^p(M;\mathcal{P}^*),d_N)$ con $\mu(\omega^{a,p}, \omega^{a+1,p}) = [\omega^{a,p}]$, cuyo núcleo es el complejo (K^*,d_N) $K^a = B^{a,p} \oplus B^{a+1,p}$. Ahora bien,

$$(\omega^{a,p}, \omega^{a+1,p}) \in K^{a+1} \longmapsto (0, \omega^{a,p}) \in K^a$$

es una homotopía $id_{K^*} \simeq 0_{K^*}$, y (K^*,d_N) es acíclico. Por tanto μ induce isomorfismos en cohomología

$$H^{p+a}(M/\mathcal{F}) = H^a(R^*,\xi) \xrightarrow[\sim]{\mu} H^a(H^p(M;\mathcal{P}^*),d_N) = E_2^{a,p}$$

<u>Ejemplos</u>-

1. Sea $M = X \times L$ foliada con hojas $\{x\} \times L$ compactas:

$$E_2^{a,u} = H^a(X;R) \otimes H^u(L;R)$$

Consideremos la sucesión espectral de Leray asociada al haz $\mathcal{P}^a$ sobre M y a la proyección $\pi\colon X \times L \longrightarrow L$,

$${}'E_2^{r,s} = H^r(L;\mathcal{H}^s(\pi;\mathcal{P}^a)) \Longrightarrow H^{r+s}(M;\mathcal{P}^a)$$

Como $\mathcal{P}^a = \Omega^a \times L$, el haz $\mathcal{H}^s(\pi;\mathcal{P}^a)$ es constante [1] con tallos isomorfos a

$$H^s(X;\Omega^a) = \begin{cases} \Omega^a(X) & \text{si } s=0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y la sucesión espectral es degenerada. Se obtiene así el isomorfismo

$$'E_2^{u,0} = H^u(L;\Omega^a(X)) = H^u(L;R) \otimes \Omega^a(X) \rightrightarrows H^u(M;\mathcal{P}^a)$$

y en consecuencia

$$H^a(X;R) \otimes H^u(L;R) = H^a(\Omega^*(X),d) \otimes H^u(L;R) \cong E_2^{a,u}$$

2. Sea G un grupo finito de rotaciones de un disco D actuando libremente sobre $\tilde{L}$ compacta, y sea $M = \tilde{L}x_G D$ foliada con hojas homeomorfas a $L = \tilde{L}/G$:

$$E_2^{a,u} = H^a(G,H^u(\tilde{L}))$$

El haz $\mathcal{P}^a$ sobre $\tilde{L}xD$ es precisamente $p^*\mathcal{P}^a$ siendo p la proyección de cada elemento en su órbita. Entonces

$$H^u(\tilde{L}x_G D;\mathcal{P}^a) = H^u(\tilde{L}xD;\tilde{\mathcal{P}}^a)^G = \mathrm{Hom}_{RG}(R,H^u(\tilde{L})\otimes\Omega^a(D))$$

y como $C^* = H^u(\tilde{L})\otimes\Omega^*(D)$ es una RG-resolución rel.proyectiva de $H^0(C^*)$,

$$E_2^{a,u} = H^a\mathrm{Hom}_{RG}(R,C^*) \cong H^a(G,H^0C^*) = H^a(G,H^u(\tilde{L})) .$$

Referencias

[1] BREDON, G. Sheaf Theory, McGraw-Hill, New York, 1967.

[2] HAEFLIGER, A. Some remarks on foliations with minimal leaves, J. Diff. Geometry, 15 (1980), 269-284.

[3] MASA, X. Sucesión espectral de cohomología asociada a variedades foliadas. Aplicaciones (tesis), Publ. Dpto. Geometría y Topología. Santiago, Nº19 (1973).

[4] RUMMLER, H. Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts, Comment. Math. Helv., 54 (1979), 224-239.