Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Sur le théorème de De Rham pour les feuilletages de Lie

Gilbert HECTOR et Enrique MACIAS

Résumé – On montre que l'intégration des formes basiques sur des classes d'équivalence de chaînes singulières définit un morphisme entre les cohomologies basiques de tout feuilletage de Lie sur une variété compacte. Ce morphisme n'étant pas en général un isomorphisme, on donne une condition suffisante pour qu'il soit injectif, et on la vérifie dans les cas compact, abélien et Heisenberg. Pour les feuilletages nilpotents, on décrit le morphisme en termes d'algèbres de Lie et on voit par un exemple que l'injectivité, dont on donne une interprétation géométrique, n'est plus vraie en général.

On the De Rham theorem for Lie foliations

Abstract – *We prove that integration of basic forms over equivalence classes of singular chains gives a well defined morphism between the basic cohomologies of any Lie foliation on a compact manifold. This is not in general an isomorphism, so we give a sufficient condition for injectivity, which includes compact, abelian and Heisenberg foliations, but fails to be true in the general nilpotent case, as we show by an example of non injectivity. Also, a description of the morphism in terms of Lie algebras, and a geometrical interpretation of injectivity are given for nilpotent foliations.*

0. INTRODUCTION. – Dans cette Note, M sera toujours une variété différentiable compacte munie d'un feuilletage F de codimension n.

Même si l'espace des feuilles M/F a en général une structure topologique et différentiable inadéquate, on peut définir des cohomologies singulière et de De Rham *basiques* de la variété feuilletée (M, F). Lorsque F est une fibration on retrouve les cohomologies de la variété basique M/F. Nous rappelons ces définitions au paragraphe 1.

Notre but est de mettre en rapport ces deux cohomologies. Nos résultats se généralisant aisément à tous les feuilletages riemanniens, nous nous bornerons ici aux feuilletages transversalement de Lie (à feuilles denses).

Après avoir remarqué que l'espace des feuilles est une Q-variété, à savoir le quotient G/Γ d'un groupe de Lie simplement connexe G, de dimension n, par l'action d'un sous-groupe Γ (dense) de type fini, nous montrons d'abord (§ 2) qu'il y a un morphisme de De Rham bien défini, induit en cohomologie par l'intégration. Mais, à l'inverse du cas classique, ce morphisme n'est pas en général un isomorphisme :

Exemple 1. – Soit $M=T^2$ et F = feuilletage par droites de pente irrationnelle α, donc $G=\mathbb{R}$ et $\Gamma=\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$. Alors $H_{DR}(M/F)=H_{DR}(S^1)$ mais $H_{sing}(M/F)=H_{sing}(T^2)$.

On voit néanmoins que dans cet exemple le morphisme de De Rham est injectif. En effet, $G=\mathbb{R}$ étant abélien, on a $\mathbb{Z}$ comme sous-groupe discret uniforme contenu dans Γ. Si l'on regarde $\mathbb{R}/\Gamma$ comme le quotient de S^1 par la rotation α, on trouve que la forme volume invariante a une intégrale non nulle sur le cycle singulier $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Le théorème 1 généralise ce critère d'injectivité.

Au paragraphe 3 nous étudions le cas nilpotent, en reliant d'abord le morphisme de De Rham au feuilletage canonique défini par la complétion de Maltsev de Γ (théorème 2). Pour assurer l'injectivité il suffirait apparemment de se restreindre aux groupes rationnels (ceux qui contiennent un sous-groupe discret uniforme Γ_0), et en fait ceci est vrai pour les extensions centrales nilpotentes de $\mathbb{R}^2$ dont le centre est l'adhérence du centre de Γ. Mais nous exhibons un feuilletage (exemple 2) où l'on ne peut pas satisfaire la condition supplémentaire $\Gamma_0\subset\Gamma$, et le morphisme de De Rham n'est pas injectif.

Note présentée par René THOM.

0764-4442/90/03110633 $ 2.00 © Académie des Sciences

1.1. *Cohomologie singulière basique* [3]. — Soit $((M)_k, \partial)$ le complexe singulier de la variété M. On identifie deux k-simplexes singuliers σ, $\mu \in (M)_k$ si et seulement si $\sigma(t)$ et $\mu(t)$ sont dans la même feuille pour chaque $t \in \Delta^k$. Les opérateurs de face étant compatibles avec cette relation d'équivalence on note $(M/F)_k$ le complexe quotient.

La cohomologie singulière basique $H^k_{sing}(M/F)$. est celle du complexe des cochaînes réelles sur $(M/F)_k$ $k \geqq 0$, avec le cobord induit par ∂. Remarquons que ce n'est pas en général la cohomologie singulière de l'espace des feuilles M/F, le rôle de complexe basique étant joué ici par $(M/F)_k$.

Des définitions tout à fait analogues sont valables pour une relation d'équivalence F quelconque sur un espace topologique M.

1.2. *Cohomologie de De Rham basique* [6]. — Une forme différentielle ω sur M est dite basique si et seulement si $i_X \omega = 0$, $i_X d\omega = 0$ pour tous les champs de vecteurs X tangents au feuilletage. On note $H^k_{DR}(M/F)$, $0 \leqq k \leqq n$, la cohomologie du complexe des formes basiques avec la différentielle extérieure.

2.1. Q-*variétés* [1]. — Soit H un pseudogroupe de difféomorphismes locaux d'une variété V qui n'ont pas de points fixe isolé. On appelle Q-*variété* le quotient $S = V/H$ par la relation d'équivalence induite par H, la projection $V \to S$ étant un des Q-atlas possibles pour S. La variété V elle-même s'identifie au pseudogroupe engendré par id_V.

On peut alors définir de façon naturelle (via les Q-atlas) les structures singulière et différentiable de S, voire les notions de morphisme, revêtement et autres fibrés de Q-variétés.

2.2. Considérons par exemple la Q-variété G/Γ, où Γ est *dénombrable* et agit sur G par des translations à droite. Sa cohomologie de De Rham $H^k_{DR}(G/\Gamma)$ est celle du complexe des formes différentielles sur G qui sont Γ-invariantes. Lorsque Γ est dense on obtient ainsi la cohomologie $H(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie de G.

Sa cohomologie singulière basique $H^k_{sing}(G/\Gamma)$ est celle qui correspond à la projection (un revêtement de Q-variétés) de G sur G/Γ. Si $E\Gamma$ est un espace contractile sur lequel Γ agit sans point fixe, un argument de suites spectrales montre qu'en fait $H_{sing}(G/\Gamma)$ est la cohomologie singulière (usuelle) de l'espace $E\Gamma \times_\Gamma G$, donc celle du classifiant $B\Gamma$ lorsque G est contractile.

2.3. Remarquons que la classe d'équivalence d'un $\sigma \in (G)_k$ se réduit à $\{R_\gamma \sigma \mid \gamma \in \Gamma\}$; en effet, si $\mu \in [\sigma]$ alors $\mu(t) = \sigma(t)\gamma(t)$ et la fonction continue $\gamma(t) : \Delta^k \to G$ doit être constante parce que Γ est dénombrable.

En conséquence, l'intégrale d'une k-forme Γ-invariante ω sur une classe $[\sigma] \in (G/\Gamma)_k$ est bien définie car

$$\int_{\sigma - R_\gamma \sigma} (\omega) = \int_\sigma (\omega - \gamma^* \omega) = 0.$$

2.4. *Feuilletages de Lie*. — Pour un G-feuilletage de Lie, Γ est l'image d'une représentation de $\pi_1(M)$ dans G, donc de type fini. Si M_Γ est le revêtement galoisien de M qui a Γ comme groupe de transformations, on sait [2] que les feuilles du feuilletage relevé F_Γ sont les fibres d'un fibré localement trivial sur G, équivariant par la représentation.

On en déduit aisément que les cohomologies basiques du feuilletage coïncident avec celles de la Q-variété $M/F = G/\Gamma$. En plus, cette identification respecte le morphisme induit par l'intégration, qui dépend donc seulement de la structure transverse du feuilletage.

THÉORÈME 1. — *Soit* F *un* G-*feuilletage de Lie à feuilles denses sur une variété compacte* M.

1. *L'intégration définit des homomorphismes de De Rham*

$$I_k : H^k_{DR}(M/F) = H^k_{DR}(G/\Gamma) \to H^k_{sing}(M/F) = H^k_{sing}(G/\Gamma), \qquad 0 \leqq k \leqq n = \text{codim } F.$$

2. *Si l'holonomie globale* Γ *de* F *contient un sous-groupe discret uniforme* Γ_0 *de* G, *alors les morphismes* I_k *sont* injectifs.

3. *En particulier, on aura l'injectivité dans les cas suivants :* G *est compact;* G *est abélien;* G *est le groupe d'Heisenberg.*

3.1. *Feuilletages nilpotents.* — Lorsque G est nilpotent (simplement connexe) le morphisme de De Rham admet une interprétation fort simple, dont l'Exemple 1 est un cas particulier. En effet, Γ étant de type fini, il existe un groupe de Lie $M(\Gamma)$ nilpotent simplement connexe (donc contractile) qui contient Γ comme sous-groupe discret uniforme, et tel que l'inclusion de Γ dans G s'étend de façon unique en un morphisme $M(i) : M(\Gamma) \to G$ de groupes de Lie [4]. On note $\mathfrak{m}(i) : \mathfrak{m}(\Gamma) \to \mathfrak{g}$ le morphisme correspondant d'algèbres de Lie.

Les fibres contractiles de $M(i)$ déterminent alors sur la nilvariété compacte $M(\Gamma)/\Gamma = B\Gamma$ un G-feuilletage de Lie à feuilles denses contractiles dont l'espace des feuilles est G/Γ. On l'appellera le feuilletage canonique associé à la paire (G, Γ).

THÉORÈME 2. — (1) *Si* G *est nilpotent, l'homomorphisme de De Rham est le morphisme* $H(\mathfrak{g}) \to H(\mathfrak{m}(\Gamma))$ *induit en cohomologie d'algèbres de Lie par* $\mathfrak{m}(i)$.

(2) *Il est injectif si et seulement si le feuilletage canonique admet un feuilletage complémentaire.*

Les hypothèses des deux théorèmes précédents impliquant que G est unimodulaire, l'injectivité de tous les I_k équivaut à celle de I_n, $n = \dim G$. Dans le cas nilpotent canonique cela veut dire que la forme volume transverse ν, avec $0 \neq [\nu] \in H^n_{DR}(M/F) = H(\mathfrak{g})$, détermine une classe non nulle dans la cohomologie de la variété, puisque l'on a $H_{DR}(M) = H(\mathfrak{m}\Gamma)$) [5].

3.2. L'exemple suivant montre qu'on peut avoir la non-injectivité (sauf trivialement pour I_1) même pour les groupes rationnels non abéliens les plus simples.

Exemple 2. — Soit G le groupe de Lie nilpotent de dimension 5 formé des matrices réelles

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & y_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

On note $\langle 1, \alpha^{n_1}, \ldots, \alpha^{n_k} \rangle \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des puissances entières $1, \alpha^{n_1}, \ldots, \alpha^{n_k}$ du nombre réel transcendant α.

Soit F le G-feuilletage canonique (sur une variété compacte M de dimension 18) correspondant au sous-groupe dense Γ dont les coefficients vérifient

$$x_1 = u_1 + \alpha u_3$$
$$x_2 = u_2 + \alpha u_3$$
$$x_3 = u_3$$
$$y_1 = v_1 + \alpha v_2 - \alpha v_3 + \alpha u_3 \left(u_2 + \frac{1}{2} \alpha u_3 \right)$$

$$y_2 = v_2 + \frac{1}{2} \alpha u_3 u_3$$

avec

$$\begin{array}{ll} u_1 \in \langle 1, \alpha^5 \rangle, & v_1 \in \langle 1, \alpha^2, \alpha^5, \alpha^7 \rangle \\ u_2 \in \langle 1, \alpha^2 \rangle, & v_2 \in \langle 1, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^8 \rangle \\ u_3 \in \langle 1, \alpha^3 \rangle, & v_3 \in \langle 1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^5 \rangle. \end{array}$$

Alors le morphisme de De Rham I_2 n'est pas injectif.

Note remise le 18 juin 1990, acceptée le 25 juin 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. BARRE, De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques, *Thèse*, Univ. Louis-Pasteur, Strasbourg-I, 1972.

[2] E. FEDIDA, Feuilletages de Lie, *Thèse*, Univ. Louis-Pasteur, Strasbourg-I, 1973, p. 67-119.

[3] C. GODBILLON, Feuilletages ayant la propriété de prolongement des homotopies, *Ann. Inst. Fourier*, 17, 2, 1967, p. 219-260.

[4] A. I. MALTSEV, On a class of homogeneous spaces, *A.M.S. Translations*, 39, 1951, p. 276-307.

[5] K. NOMIZU, On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, *Ann. of Math.*, 59, 3, 1954, p. 531-538.

[6] B. L. REINHART, Harmonic integrals on almost product manifolds, *Trans. Amer. Soc.*, 88, 1958, p. 243-275.

G. H. : *Laboratoire de Géométrie U.C.B.L., G.D.R.* 144 *et U.A.* 745, 43 *boulevard du* 11-*Novembre*-1918, 69622 *Villeurbanne Cedex;*

E. M. : *Dpto. Xeometria e Topoloxia, Facultade de Matemáticas, Universidade de Santiago*, 15705 *Santiago de Compostela, Espagne.*