UNA NOTA SOBRE TOPOLOGIAS HAUSDORFF

por

E. MACÍAS VIRGÓS

RESUMEN

Se da una condición necesaria y suficiente para que la intersección de dos topologías sea Hausdorff.

En su libro «General Topology» (Addison-Wesley, 1970) el profesor S. Willard comenta: «I know of no necessary and sufficient condition for the intersection of two Hausdorff topologies to be Hausdorff» (p. 301). El objeto de la presente nota es dar una condición tal.

Sean T, G dos topologías (no necesariamente Hausdorff) en un conjunto X, sea Δ la diagonal del producto cartesiano $X \times X$, y llamemos $\pi_1, \pi_2 : X \times X \longrightarrow X$ a las proyecciones.

Entonces la topología $T \cap G$ es Hausdorff (y por tanto lo son T y G) si y sólo si para todo $p \in X \times X$, $p \notin \Delta$, existe un encaje

$$\{p\} \subset W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{2k} \subset W_{2k+1} \subset \ldots \subset X \times X$$

tal que

$$W_{2k} \in T \times T, \ W_{2k+1} \in G \times G \quad y \quad \pi_1 (W_k) \cap \pi_2 (W_k) = \varnothing$$

para todo $k \geqslant 0$.

En efecto, si $T \cap G$ es Hausdorff, dado $p \notin \Delta$ es $\pi_1(p) \neq \pi_2(p)$ y por tanto existen $U, V \in T \cap G$ entornos de $\pi_1(p)$, $\pi_2(p)$ respectivamente, tales que $U \cap V = \varnothing$. Basta tomar $W_k = U \times V$ para todo $k \geqslant 0$.

Recíprocamente, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Si $\{W_k\}_{k \geq 0}$ es el encaje correspondiente a $p = (x, y) \notin \Delta$, tenemos

$$\bigcup_{k \geq 0} W_{2k} = \bigcup_{k \geq 0} W_{2k+1},$$

y por ser abiertas las proyecciones es

$$\pi_1 (W_{2k}) \in T, \ \pi_1 (W_{2k+1}) \in G,$$

luego

$$U = \bigcup_{k \geq 0} \pi_1 (W_{2k}) = \pi_1 \Big(\bigcup_{k \geq 0} W_{2k}\Big) = \pi_1 \Big(\bigcup_{k \geq 0} W_{2k+1}\Big) = \bigcup_{k \geq 0} \pi_1 (W_{2k+1})$$

pertenece a $T \cap G$. Análogamente,

$$V = \pi_2 \Big(\bigcup_{k \geq 0} W_{2k}\Big) \in T \cap G,$$

y hemos encontrado $U, V, \in T \cap G$ entornos de x, y respectivamente, tales que $U \cap V = \varnothing$.