

ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 35, Number 4, Winter 1991

MACIAS
@ 241

**SOUS-GROUPES DENSES DES GROUPES
DE LIE NILPOTENTS**

PAR E. MACIAS-VIRGÓS

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

SOUS-GROUPES DENSES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

PAR E. MACIAS-VIRGÓS

0. Introduction

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. Un *réseau* de G est un sous-groupe discret Γ_0 qui est uniforme, c'est-à-dire tel que G/Γ_0 soit compact.

Un résultat bien connu de Mal'cev [Ma] établit que G possède un tel réseau si et seulement si son algèbre de Lie \mathfrak{g} admet des constantes de structure rationnelles par rapport à une certaine base; on dit alors que G est rationnel. Tout groupe abélien est rationnel; des exemples de groupes non rationnels sont donnés dans [Ma] et [Sch].

Le but de ce travail est d'examiner la situation suivante, qui apparaît, par exemple, dans l'étude des feuilletages transversalement de Lie à feuilles denses sur une variété compacte [Mo]:

QUESTION. Soit Γ un sous-groupe *dense* de G . Est-il toujours possible de trouver un réseau de G qui soit contenu dans Γ ?

Lorsque G est rationnel il semblerait en principe possible de déformer n'importe quel réseau jusqu'à le rendre contenu dans le sous-groupe Γ fixé auparavant.

C'est par exemple ce qui se passe pour \mathbf{R}^n , où l'on sait qu'un sous-groupe discret est uniforme si et seulement s'il contient n vecteurs \mathbf{R} -linéairement indépendants; nous généralisons ce résultat à une classe plus large d'extensions centrales de \mathbf{R}^2 qui inclut en particulier le groupe d'Heisenberg $H_3 \subset SL(3, \mathbf{R})$.

Mais, de façon assez surprenante, le résultat n'est plus vrai en général même pour les extensions centrales de \mathbf{R}^3 . En effet, au §3 nous montrons que dans le groupe de Lie H_5 des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & y_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Received January 29, 1990.

1980 Mathematics Subject Classification (1985 Revision). Primary 22E25; Secondary 58A12.

© 1991 by the Board of Trustees of the University of Illinois
Manufactured in the United States of America

de $SL(4, \mathbf{R})$, il existe un sous-groupe dense de type fini Γ , de rang $\Gamma = 18$, qui ne peut contenir aucun réseau de G .

Nous avons besoin pour cela du critère cohomologique suivant, dont la démonstration occupe le §2:

A tout groupe discret nilpotent, de type fini, sans torsion, on peut associer un groupe de Lie rationnel $M(\Gamma)$ dont Γ est un réseau; $M(\Gamma)$ est appelée la complétion réelle de Mal'cev de Γ .

Notons

$$m(i): m(\Gamma) \rightarrow \mathfrak{g}$$

le morphisme d'algèbres de Lie associé à l'extension $M(i): M(\Gamma) \rightarrow G$ de l'inclusion $i: \Gamma \subset G$. Si Γ contient un réseau de G , alors le morphisme induit en cohomologie

$$m(i)^*: H(\mathfrak{g}) \rightarrow H(m(\Gamma))$$

doit être injectif.

Si l'on essaie de trouver directement un exemple où $m(i)^*$ n'est pas injectif, un calcul direct semble hors de question. L'idée est alors de construire une extension intermédiaire N entre $M(\Gamma)$ et G , et de l'interpréter comme une classe dans $H^2(\mathfrak{g})$ qui est une obstruction à l'injectivité.

L'auteur veut remercier G. Hector et D. Tanré pour l'aide et l'intérêt qu'ils ont portés à ce travail, et le referee pour ses remarques.

1. Existence de réseaux

Soit G un groupe de Lie nilpotent 1-connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , et soit Γ un sous-groupe dense de G .

Soit $G = G^0 \supset G^1 \supset \dots \supset G^s \supset 1$ la suite centrale descendante définie par $G^{k+1} = [G, G^k]$; le degré de nilpotence de G est s ; son centre $Z(G)$ vérifie $Z(G) \supset G^s$. La suite descendante de $\Gamma \subset G$ vérifiant $\Gamma^k \subset G^k$ pour tout k , Γ est nilpotent.

LEMME 1. De la densité de Γ dans G , on déduit:

- (a) Γ a même degré de nilpotence que G et son centre $Z(\Gamma)$ est $Z(G) \cap \Gamma$.
- (b) Si $Z(G) = G^s$ alors $Z(\Gamma)$ est dense dans $Z(G)$.

Remarque. Lorsque G^s est contenu strictement dans $Z(G)$, on n'a pas en général la densité de $Z(\Gamma)$ dans $Z(G)$; on peut construire un tel exemple dans le groupe d'Heisenberg généralisé $H_3 \times \mathbf{R}$.

Preuve. $[\Gamma, \Gamma]$ est dense dans $[G, G]$ par continuité de $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ (mais en général $[\Gamma, \Gamma]$ est strictement plus petit que $[G, G] \cap \Gamma$).

Le même raisonnement donne, par récurrence, la densité de Γ^k dans G^k pour tout k . En conséquence le degré de nilpotence de Γ doit encore être s ; donc $Z(\Gamma) \supset \Gamma^s$.

On voit aussi facilement que $Z(G) \cap \Gamma = Z(\Gamma)$; en effet, si $\gamma_n h = h \gamma_n$ pour tout n alors $gh = hg$ pour $g = \lim \gamma_n$.

Finalement, si $G^s = Z(G)$ on a

$$\Gamma^s \subset Z(\Gamma) = Z(G) \cap \Gamma \subset Z(G) = G^s$$

et Γ^s est dense dans G^s , d'où la densité de $Z(\Gamma)$ dans $Z(G)$. Q.E.D.

PROPOSITION 2. *Si G est abélien, alors Γ contient un réseau de G .*

Preuve. G est isomorphe à \mathbf{R}^n . Comme Γ est dense, on peut choisir $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ tels que $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ soit une \mathbf{R} -base de \mathbf{R}^n ; le contraire signifierait que Γ est contenu dans un certain sous-espace vectoriel (fermé) de dimension strictement plus petite que n . Le groupe additif $\Gamma_0 \subset \Gamma$ engendré par les $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (à coefficients dans \mathbf{Z}) est un réseau de \mathbf{R}^n . Q.E.D.

Pour un groupe de Lie nilpotent 1-connexe quelconque G , il faut remplacer la notion d'indépendance linéaire par celle de *rang*:

Un sous-groupe Γ_0 de type fini est de rang r si l'on peut trouver un système de générateurs $(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ tel que

$$\gamma_j \gamma_i \gamma_j^{-1} \in \langle \gamma_1, \dots, \gamma_i \rangle \quad \text{pour } j > i.$$

Γ_0 est alors un réseau de G si et seulement s'il est discret et de rang égal à $\dim G$ [Ra].

PROPOSITION 3. *Soit G un groupe de Lie nilpotent 1-connexe qui est une extension centrale de \mathbf{R}^2 , et soit Γ un sous-groupe dense de G . Alors:*

- (a) Γ contient un sous-groupe Γ_0 de rang égal à $\dim G$;
- (b) Si $Z(\Gamma)$ est dense dans $Z(G)$, alors Γ_0 est un réseau de G .

Preuve. La suite exacte d'homotopie de l'extension

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \mathbf{R}^2 \rightarrow 0$$

montre que le noyau $K \subset Z(G)$ est aussi 1-connexe, donc isomorphe à \mathbf{R}^n . En fait, si G n'est pas abélien on doit avoir $K = Z(G)$.

1. Γ étant dense dans G , $p(\Gamma)$ est dense dans \mathbf{R}^2 et doit contenir un certain réseau $\Gamma_0^+ \cong \mathbf{Z}^2$ engendré par x_1, x_2 . Choisissons $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tels que

$p(\gamma_i) = x_i$; il existe $z \in Z(\Gamma) = Z(G) \cap \Gamma$, qui ne dépend pas du choix des γ_i , pour lequel $\gamma_2 \gamma_1 \gamma_2^{-1} = z \gamma_1$.

2. Supposons d'abord $Z(\Gamma)$ dense dans $Z(G)$. On peut alors trouver une base (z_1, \dots, z_n) de \mathbf{R}^n telle que $i(z_j) \in \Gamma$ pour tout j . En plus, si $z \neq 1_G$ on peut supposer que $z = i(z_1)$; en effet, si $0 \neq z = \sum t_j z_j$, $t_j \in \mathbf{R}$, il existe par exemple $t_1 \neq 0$, donc $z_1 = 1/t_1(z - \sum_{j>1} t_j z_j)$, de façon que (z, z_2, \dots, z_n) soit toujours un système de \mathbf{R} -générateurs pour \mathbf{R}^n .

Le sous-groupe Γ_0 engendré par $(i(z_1), \dots, i(z_n), \gamma_1, \gamma_2)$ a alors un rang égal à $n + 2 = \dim G$ et il est contenu dans Γ .

3. Γ_0 sera le réseau cherché dès qu'on aura prouvé qu'il est discret; puisqu'il est dénombrable il suffira de savoir qu'il est fermé. Or, si on a une suite

$$\{z_\nu \gamma_1^{a_\nu} \gamma_2^{b_\nu}\} \rightarrow g,$$

où z_ν est une combinaison à coefficients entiers des z_1, \dots, z_n , on obtiendra par p une suite

$$\{a_\nu x_1 + b_\nu x_2\} \rightarrow p(g)$$

dans le réseau $\Gamma_0^+ = p(\Gamma_0)$. En conséquence $a_\nu = a$, $b_\nu = b$ pour ν assez grand, et

$$p(g) = ax_1 + bx_2,$$

d'où

$$\{z_\nu \gamma_1^{a_\nu} \gamma_2^{b_\nu}\} \rightarrow g = z' \gamma_1^a \gamma_2^b \quad \text{avec } z' \in Z(G).$$

Mais comme $\{z_\nu\} \rightarrow z'$ est une suite dans un réseau de \mathbf{R}^n , on doit avoir $z_\nu = z$ pour ν assez grand. Cela montre que g appartient à Γ_0 .

4. En général, si le dernier terme non nul G^s de la suite centrale descendante est strictement plus petit que le centre $Z(G)$, choisissons une décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^s + \mathfrak{a} + \mathfrak{m}$ avec $\mathfrak{g}^s + \mathfrak{a} = Z(\mathfrak{g})$. On a alors une décomposition de G comme produit direct $G = H \times A$, où A est isomorphe au groupe abélien 1-connexe $Z(G)/G^s$, et H est nilpotent 1-connexe de même degré de nilpotence que G , mais avec $Z(H) = H^s = G^s$ comme on le vérifie aisément. De plus, $Z(G)$ est le produit direct $G^s \times A$.

On notera p_H, p_A les projections de $G = H \times A$ sur chacun des facteurs; $p_H(\Gamma), p_A(\Gamma)$ sont alors des sous-groupes denses de H et A respectivement.

Si $Z(\Gamma)$ n'est pas dense dans $Z(G)$, on a quand même une suite exacte

$$0 \rightarrow Z(H) \rightarrow H \rightarrow \mathbf{R}^2 \rightarrow 0,$$

où $p_H(\Gamma)$ est un sous-groupe dense de H . L'égalité $Z(H) = H^s$ implique la densité de $Z(p_H(\Gamma)) = G^s \cap p_H(\Gamma)$ dans $Z(H) = H^s$.

Considérons maintenant le sous-groupe dense $\Gamma^* = p_H(\Gamma) \times p_A(\Gamma)$ de G . On a

$$\begin{aligned} Z(\Gamma^*) &= Z(G) \cap \Gamma^* = (G^s \times A) \cap \Gamma^* = (G^s \cap p_H(\Gamma)) \times p_A(\Gamma) \\ &= Z(p_H(\Gamma)) \times p_A(\Gamma); \end{aligned}$$

donc $Z(\Gamma^*)$ est dense dans $Z(G) = Z(H) \times A$.

En conséquence, il existe d'après la partie 2 un certain sous-groupe

$$\Gamma_0 = \langle z_1, z_2, \dots, z_n, \gamma_1, \gamma_2 \rangle,$$

$n = \dim G$, de rang $= n + 2$, qui est contenu dans Γ^* . Or, $z_i \in \Gamma^*$ signifie qu'il existe des $a_i \in A$ tels que $z_i a_i \in \Gamma$. En particulier $z_i a_i \in Z(G) \cap \Gamma = Z(\Gamma)$; de même, on peut choisir les γ_i dans Γ parce que $p(\Gamma^*) = p(\Gamma)$. Donc, le sous-groupe $\Gamma_0 = \langle z_i a_i, \gamma_j \rangle$ a toujours un rang égal à $n + 2$ et il est contenu dans Γ (mais il n'est pas nécessairement discret). Q.E.D.

Comme nous le verrons plus loin, la méthode utilisée dans la démonstration précédente ne s'adapte pas aux extensions centrales de \mathbf{R}^3 . Nous allons d'abord établir un critère cohomologique pour décider si un sous-groupe dense peut contenir un réseau de G .

2. La complétion de Mal'cev

Bien que quelques unes des considérations de ce paragraphe se généralisent aisément, nous bornerons ici au cas où Γ est un sous-groupe dense de type fini d'un groupe de Lie G nilpotent 1-connexe. Il existe alors un groupe de Lie $M(\Gamma)$ nilpotent 1-connexe qui contient un réseau isomorphe à Γ [Ma]. Cette *complétion de Mal'cev* $M(\Gamma)$ est unique, à isomorphisme près, et vérifie la propriété suivante: tout morphisme de groupes $\phi: \Gamma \rightarrow N$, avec N un groupe de Lie nilpotent 1-connexe, admet une seule extension $M(\phi): M(\Gamma) \rightarrow N$ en homomorphisme de groupes de Lie.

Nous allons considérer, en particulier, l'homomorphisme $M(i): M(\Gamma) \rightarrow G$, extension de l'inclusion $i: \Gamma \subset G$. Par passage aux algèbres de Lie, on obtient un morphisme $m(i): m(\Gamma) \rightarrow \mathfrak{g}$ qui donne en cohomologie $m(i)^*: H(\mathfrak{g}) \rightarrow H(m(\Gamma))$.

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} étant unimodulaire, la dualité de Poincaré sur $H(\mathfrak{g})$ entraîne:

LEMME 4. Soit $[\omega]$ un générateur de $H^n(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}$, $n = \dim G$. Alors $[m(i)^*(\omega)]$ est non nulle dans $H(m(\Gamma))$ si et seulement si $m(i)^*$ est injective.

PROPOSITION 5. Soit Γ un sous-groupe dense de type fini d'un groupe de Lie G nilpotent 1-connexe. Si $m(i)^*$ n'est pas injective alors Γ ne contient aucun réseau de G .

Preuve. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un réseau de G . Si $M(i_0): G = M(\Gamma_0) \rightarrow M(\Gamma)$ est l'extension de l'inclusion $\Gamma_0 \subset M(\Gamma)$, alors $M(i)M(i_0) = \text{id}$ par unicité, donc $m(i_0)^*m(i)^* = \text{id}$ et $m(i)^*$ est injective. Q.E.D.

Nous allons considérer maintenant la suite exacte courte de cinq termes

$$0 \rightarrow H^1(\mathfrak{g}) \rightarrow H^1(\Gamma) \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} H^2(\mathfrak{g}) \rightarrow H^2(\Gamma) \quad (1)$$

associée au morphisme surjectif $m(i): \mathfrak{m}(\Gamma) \rightarrow \mathfrak{g}$ d'algèbres de Lie, dont le noyau sera noté \mathfrak{k} . Elle provient de la suite spectrale de Hochschild-Serre, $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{g}; H^q(\mathfrak{k}))$, qui converge vers $H(\mathfrak{m}(\Gamma))$. En particulier $E_2^{0,1} = H^1(\mathfrak{k})_{\mathfrak{g}}$ est l'ensemble des invariants par l'action de \mathfrak{g} .

D'après Van Est [VE], $H(\mathfrak{g})$ est isomorphe à la cohomologie continue $H_{\infty}(G)$ du groupe de Lie nilpotent 1-connexe G . La cohomologie $H(\mathfrak{m}(\Gamma))$ de l'algèbre de Lie de la complétion de Mal'cev de Γ est précisément la cohomologie de De Rham de la nilvariété compacte $M(\Gamma)/\Gamma$ [No], c'est-à-dire la cohomologie $H(\Gamma)$ du groupe discret Γ , parce que $M(\Gamma)$ est contractile. De même $H(\mathfrak{g}) = H(G/\Gamma_0) = H(\Gamma_0)$ si Γ_0 est un réseau de G .

D'abord, $m(i)^1: H^1(\mathfrak{g}) \rightarrow H^1(\Gamma)$ correspond à $H_{\infty}^1(G) \rightarrow H^1(\Gamma)$, qui associe à chaque morphisme $G \rightarrow \mathbf{R}$ de groupes de Lie sa restriction à Γ ; il est injectif à cause de la densité de Γ . Par contre, la non injectivité de $m(i)^2: H^2(\mathfrak{g}) \rightarrow H^2(\Gamma)$ sera équivalente à l'existence d'extensions non triviales, en groupes de Lie, de G par \mathbf{R} , dont la restriction à Γ donne l'extension triviale $\Gamma \times \mathbf{R}$.

Notons $K = \text{Ker } M(i)$ le groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie est \mathfrak{k} . Alors $H^1(\mathfrak{k})$ est le dual de $\mathfrak{k}/[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ et correspond aux morphismes $\phi: \mathfrak{k} \rightarrow \mathbf{R}$ d'algèbres de Lie, ou de façon équivalente aux morphismes de groupes de Lie $\Phi: K \rightarrow \mathbf{R}$ avec $d\Phi = \phi$.

LEMME 6. Si $\phi \in E_2^{0,1} = H^1(\mathfrak{k})_{\mathfrak{g}}$ alors $\text{Ker } \phi$ est un idéal de $\mathfrak{m}(\Gamma)$.

Preuve. L'action de \mathfrak{g} sur \mathfrak{k} est donnée par $X^*Y = [X^*, Y]$, où $m(i)(X^*) = X$; ainsi un morphisme $\phi: \mathfrak{k} \rightarrow \mathbf{R}$ d'algèbres de Lie est invariant si et seulement si $\phi[X^*, Y] = 0$, $X^* \in \mathfrak{m}(\Gamma)$, $Y \in \mathfrak{k}$, c'est-à-dire $[\mathfrak{m}(\Gamma), \mathfrak{k}] \subset \text{Ker } \phi$. Q.E.D.

Par exemple, $H^1(\Gamma) \rightarrow E_2^{0,1}$ fait correspondre à chaque homomorphisme de groupes discrets $f: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ la restriction à K de $M(f): M(\Gamma) \rightarrow \mathbf{R}$. Remarquons que si f provient d'un morphisme $G \rightarrow \mathbf{R}$, alors $M(f) = f \circ M(i)$, donc $M(f)(K) = 0$.

Étudions maintenant $d_2: E_2^{0,1} \rightarrow H^2(\mathfrak{g})$. Soit $\phi \in E_2^{0,1}$; si $\phi \neq 0$ alors ϕ est surjectif, $\mathfrak{k}/\text{Ker } \phi = \mathbf{R}$, et $d_2(\phi) \in H^2(\mathfrak{g})$ est la classe qui représente l'extension

$$0 \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \mathfrak{m}(\Gamma)/\text{Ker } \phi \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0.$$

De façon explicite, $d_2(\phi)$ est représentée par le cocycle $d_2\phi(X, Y) = \phi[X^*, Y^*]_{\text{hor}}$ où hor note la partie horizontale pour une décomposition quelconque $\mathfrak{m}(\Gamma) = \mathfrak{k} \oplus \mathcal{W}$ en espaces vectoriels, et X^*, Y^* se projettent par $\mathfrak{m}(i)$ sur X, Y respectivement.

En termes de groupes de Lie, on aura l'extension

$$0 \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow M(\Gamma)/\text{Ker } \Phi \rightarrow G \rightarrow 1, \quad d\Phi = \phi,$$

le Lemme précédent montrant que $\text{Ker } \Phi$ est un sous-groupe de Lie *normal* dans $M(\Gamma)$. Remarquons que si Φ est la restriction à K de $M(f)$, $f: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$, alors

$$[X^*] \rightarrow (\mathfrak{m}(i)(X^*), \mathfrak{m}(f)(X^*))$$

définit un isomorphisme entre $\mathfrak{m}(\Gamma)/\text{Ker } \phi$ et l'extension triviale $\mathfrak{g} \times \mathbf{R}$.

PROPOSITION 7. Soit

$$\text{ext}: 0 \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow N \xrightarrow{\Delta} G \rightarrow 1$$

une extension, élément de $H_z^2(G) = H^2(\mathfrak{g})$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a) $\text{ext} \in \text{Im } d_2$;
- (b) N contient Γ comme sous-groupe, et la restriction de Δ à Γ est id_Γ ;
- (c) $M(i): M(\Gamma) \rightarrow G$ se factorise par Δ .

Preuve. L'équivalence de (b) et (c) est immédiate à partir de la propriété universelle de la complétion de Mal'cev.

D'autre part, toute extension $d_2\Phi = M(\Gamma)/\text{Ker } \Phi$ se factorise parce que $\text{Ker } \Phi \subset K = \text{Ker } M(i)$, donc (a) \Rightarrow (c).

Il reste à montrer (c) \Rightarrow (a). Or, si l'on a $h: M(\Gamma) \rightarrow N$ avec $M(i) = \Delta \circ h$, alors la restriction de h à K donne $\Phi: K \rightarrow \mathbf{R}$, dont le noyau est $\text{Ker } h$. L'isomorphisme $M(\Gamma)/\text{Ker } h = G$ montre que l'extension donnée est $d_2\Phi$.
Q.E.D.

L'exactitude de la suite (1) implique alors:

COROLLAIRE. $\mathfrak{m}(i)^2: H^2(\mathfrak{g}) \rightarrow H^2(\mathfrak{m}(\Gamma))$ est injectif si et seulement si toute extension vérifiant les hypothèses de la Proposition 7 est triviale.

Remarque. On peut généraliser le critère cohomologique de la Proposition 5 au cas non nilpotent en considérant un sous-groupe compact maximale K de G , de façon que G/K est contractile. D'après Van Est on aura $H_\infty(G) = H(\mathfrak{g}, K)$, la cohomologie du complexe des formes $\omega \in \Lambda \mathfrak{g}^*$ telles que $i_X \omega = 0$, $L_X \omega = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{k}$, l'algèbre de Lie de K .

L'inclusion $\Gamma \subset G$ induit un morphisme $H(G^\delta) \rightarrow H(\Gamma)$ entre leurs cohomologies comme groupes *discrets* (à coefficients dans \mathbf{R}). L'inclusion des cochaînes continues dans le complexe de toutes les cochaînes induit une flèche $H_\infty(G) \rightarrow H(G^\delta)$. On obtient alors par composition un morphisme $k^*: H(\mathfrak{g}, K) \rightarrow H(\Gamma)$ [BW].

Pour expliciter k^* au niveau des complexes de cochaînes on définit

$$k(\omega)(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int_{\Delta(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} \omega$$

où $\Delta(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est un certain n -simplexe singulier sur G/K qu'on associe, à l'aide d'une contraction, à chaque $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \Gamma^n$; à ce sujet, une discussion détaillée apparaît dans [Du]. Lorsque G est nilpotent 1-connexe et Γ de type fini, on vérifie aisément que $k^* = m(i)^*$ si l'on prend $F(\exp(x), t) = \exp(tx)$ comme contraction dans $M(\Gamma)$ et G .

3. L'exemple

Soit G un groupe de Lie nilpotent 1-connexe, avec $Z(G) = [G, G]$ et de degré de nilpotence $s = 1$. Un tel groupe est alors une extension centrale de $G/Z(G) \cong \mathbf{R}^m$. Etant donné les résultats du §1, nous allons considérer maintenant le cas $m = 3$, où un argument élémentaire montre que $\dim Z(G) \geq 2$.

L'exemple le plus simple est alors le groupe de Lie H_5 des matrices triangulaires à coefficients réels

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & y_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

dont l'algèbre de Lie \mathfrak{g} admet une base $\mathfrak{g} = \langle X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2 \rangle$ avec $[X_1, X_2] = Y_1$, $[X_1, X_3] = Y_2$ et tous les autres crochets nuls.

Le groupe de Lie H_5 est rationnel, parce qu'il contient le réseau $H_5 \cap \mathrm{SL}(4, \mathbf{Z})$ formé des matrices à coefficients entiers. Néanmoins, nous allons construire un sous-groupe dense et de type fini Γ de H_5 , qui ne peut contenir aucun réseau de H_5 . Au lieu de décrire Γ directement, nous profiterons des résultats précédents pour en simplifier la définition.

PROPOSITION 8. Pour $G = H_5$ il existe:

- Un groupe de Lie N , nilpotent 1-connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{n} ;
- un sous-groupe de type fini Γ de N ;
- et un morphisme surjectif de groupes de Lie $\Delta: N \rightarrow G$, tels que:

- (a) $\Gamma \cap \text{Ker } \Delta = 1$, et Γ est dense dans N , et
- (b) le morphisme $\Delta^*: H(\mathfrak{g}) \rightarrow H(\mathfrak{n})$ induit en cohomologie n'est pas injectif.

COROLLAIRE. Le sous-groupe dense de type fini $\Delta(\Gamma) \cong \Gamma$ du groupe de Lie $G = H_5$ ne contient aucun réseau de G .

Preuve du Corollaire. On utilisera la Proposition 5. Considérons la complétion de Mal'cev $M(\Gamma)$ de $\Gamma \cong \Delta(\Gamma)$; l'unicité du morphisme induit par les inclusions prouve qu'il y a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M(\Gamma) & \cong & M(\Delta(\Gamma)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & G \end{array}$$

et que par conséquent $H(\mathfrak{g}) \rightarrow H(\mathfrak{m}(\Delta(\Gamma)))$ n'est pas injectif puisqu'il se factorise en $H(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\Delta^*} H(\mathfrak{n}) \rightarrow H(\mathfrak{m}(\Delta(\Gamma)))$ et Δ^* n'est pas injectif.

La densité de $\Delta(\Gamma)$ dans G découle de celle de Γ dans N et de la surjectivité de Δ . Q.E.D.

Remarque. En fait, d'après la Proposition 7 nous savons que l'existence de N est une obstruction à l'injectivité de $m(i)^*$.

Preuve de la Proposition 8. Soit $N \subset SL(6, \mathbf{R})$ le groupe nilpotent 1-connexe de dimension 6 formé des matrices à coefficients réels

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 & 0 & v_1 & v_2 \\ & 1 & 0 & 0 & u_2 & u_3 \\ & & 1 & u_2 & 0 & v_3 \\ & & & 1 & 0 & u_3 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{n} = \langle U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3 \rangle$ avec $[U_1, U_2] = V_1$, $[U_1, U_3] = V_2$, $[U_2, U_3] = V_3$.

Fixons une fois pour toutes un nombre réel transcendant α , et notons

$$\langle 1, \alpha^{n_1}, \dots, \alpha^{n_k} \rangle \subset \mathbf{R}$$

l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbf{Z} des puissances entières $1, \alpha^{n_1}, \dots, \alpha^{n_k}$. Les α^{n_i} , $n_i \neq 0$, n'étant pas rationnels, on obtient ainsi des sous-groupes *denses* de \mathbf{R} .

Soit $\Gamma = \Gamma_\alpha$ le sous-groupe de N formé des matrices dont les coefficients vérifient

$$\begin{aligned} u_1 &\in \langle 1, \alpha^5 \rangle & v_1 &\in \langle 1, \alpha^2, \alpha^5, \alpha^7 \rangle \\ u_2 &\in \langle 1, \alpha^2 \rangle & v_2 &\in \langle 1, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^8 \rangle \\ u_3 &\in \langle 1, \alpha^3 \rangle & v_3 &\in \langle 1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^5 \rangle. \end{aligned}$$

Définissons enfin l'homomorphisme $\Delta = \Delta_\alpha$ par les relations

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + \alpha u_3 \\ x_2 &= u_2 + \alpha u_3 \\ x_3 &= u_3 \\ y_1 &= v_1 + \alpha v_2 - \alpha v_3 + \alpha u_3 (u_2 + \frac{1}{2} \alpha u_3) \\ y_2 &= v_2 + \frac{1}{2} \alpha u_3 u_3. \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur les vérifications correspondantes, la condition $\Gamma \cap \text{Ker } \Delta = 1$ étant assurée par le caractère non algébrique de α . Il est aussi facile de trouver un système fini de générateurs pour Γ , dont le rang est 18.

Pour finir, nous montrons que Δ^* n'est pas injectif.

L'algèbre de Lie de N est formée des matrices $A - \text{Id}$, $A \in N$, c'est-à-dire zéros sur la diagonale, et $\exp: \mathfrak{n} \rightarrow N$ est définie par $\exp(A) = \text{Id} + A + A^2/2$. Des considérations analogues sont valables pour G . On en déduit que le morphisme $d\Delta: \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{g}$ associé à Δ est donné par:

$$\begin{aligned} d\Delta(U_1) &= X_1 \\ d\Delta(U_2) &= X_2 \\ d\Delta(U_3) &= X_3 + \alpha(X_1 + X_2) \\ d\Delta(V_1) &= Y_1 \\ d\Delta(V_2) &= Y_2 + \alpha Y_1 \\ d\Delta(V_3) &= -\alpha Y_1. \end{aligned}$$

Considérons les duales $\mathfrak{g}^* = \langle x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \rangle$ et $\mathfrak{n}^* = \langle u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \rangle$. L'image par Δ^* du générateur de $H^5(\mathfrak{g})$ est alors

$$\begin{aligned} \Delta^*(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge y_1 \wedge y_2) \\ &= u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge v_1 \wedge v_2 + \alpha u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge v_2 \wedge v_3 \\ &= -d(u_1 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) - \alpha d(u_3 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \end{aligned}$$

qui représente la classe nulle dans $H^5(\mathfrak{n})$.

Q.E.D.

RÉFÉRENCES

- [BW] A. BOREL ET N. WALLACH, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Ann. of Math. Studies, no. 94, Princeton University Press, 1980.
- [DU] J.L. DUPONT, *Curvature and characteristic classes*, Lecture Notes in Math., no. 640, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [MA] A.I. MAL'CEV, *On a class of homogeneous spaces*, Transl. Amer. Math. Soc., vol. 39 (1951), pp. 276–307.
- [MO] P. MOLINO, *Riemannian foliations*, Progress in Math., vol. 73, Birkhäuser, 1988.
- [NO] K. NOMIZU, *On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups*, Ann. of Math., vol. 59 (1954), pp. 531–538.
- [RA] M.S. RAGHUNATHAN, *Discrete subgroups of Lie groups*, Ergebnisse der Math., vol. 68, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [SCH] J. SCHEUNEMAN, *Two-step nilpotent Lie algebras*, J. Algebra, vol. 7 (1967), pp. 152–159.
- [VE] W.T. VAN EST, *A generalization of the Cartan-Leray spectral sequence*, Proc. Kon. Neder. Akad. Ser. A, vol. 61 (1958), pp. 399–413.

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO.
SANTIAGO DE COMPOSTELA, ESPAGNE