

LEMME DE MOSER FEUILLETÉ ET CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS DE POISSON RÉGULIÈRES

G. HECTOR, E. MACIAS ET M. SARALEGI

Abstract

Regular Poisson structures with fixed characteristic foliation \mathcal{F} are described by means of foliated symplectic forms. Associated to each of these structures, there is a class in the second group of foliated cohomology $H^2(\mathcal{F})$. Using a *foliated version* of Moser's lemma, we study the isotopy classes of these structures in relation with their cohomology class. Explicit examples, with $\dim \mathcal{F} = 2$, are described.

1. Cohomologie feuilletée et variétés de Poisson régulières

Soit (M, \mathcal{F}) une variété munie d'un feuilletage régulier \mathcal{F} . On introduit le complexe des *formes feuilletées* puis la notion de *forme feuilletée symplectique* qui servira à décrire les variétés de Poisson régulières.

1.1. Formes feuilletées—cohomologie feuilletée.

Soient $(\Omega^*(M), d)$ le complexe de DeRham de M et $\Omega^*(M, \mathcal{F})$ le sous-complexe des formes relatives défini par $\omega \in \Omega^r(M, \mathcal{F})$ si $\omega \in \Omega^r(M)$ et

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_r) = 0$$

pour tout r -uplet de champs tangents à \mathcal{F} . Le complexe $\Omega^*(\mathcal{F})$ des *formes \mathcal{F} -feuilletées* est défini par passage au quotient:

$$\Omega^*(\mathcal{F}) = \Omega^*(M) / \Omega^*(M, \mathcal{F})$$

et sa cohomologie $H^*(\mathcal{F})$ est la *cohomologie feuilletée* de (M, \mathcal{F}) . Pour $r > \dim \mathcal{F}$, on a $\Omega^r(\mathcal{F}) = 0$ et donc $H^r(\mathcal{F}) = 0$ mais même si M est compacte on ne peut en général rien conclure pour $H^n(\mathcal{F})$, $n = \dim \mathcal{F}$.

Concernant la structure de $\Omega^*(\mathcal{F})$, on remarquera que:

- i) $\Omega^*(M, \mathcal{F})$ étant un idéal de $\Omega^*(M)$, le produit extérieur \wedge définit par passage au quotient une structure multiplicative sur $\Omega^*(\mathcal{F})$;

- ii) le produit intérieur $X \lrcorner \alpha$ de $\alpha \in \Omega^*(\mathcal{F})$ avec un champ X tangent à \mathcal{F} est un élément bien défini de $\Omega^{*-1}(\mathcal{F})$; on pourra donc définir la dérivée de Lie $L_X \alpha$ par la formule habituelle; elle s'annulera exactement si α est invariante par le flot engendré par X ;
- iii) de même, l'évaluation de $\alpha \in \Omega^r(\mathcal{F})$ sur un r -champ tangent à \mathcal{F} est un élément de $\Omega^0(\mathcal{F}) = \Omega^0(M)$ donc une fonction sur M ; en particulier on pourra définir comme d'habitude le rang de α en un point.

1.2. Formes feuilletées symplectiques et variétés de Poisson.

Supposons que \mathcal{F} est de dimension paire $2m$. On dira qu'une forme $\sigma \in \Omega^2(\mathcal{F})$ est une *forme feuilletée symplectique* si elle est fermée et de rang $2m$. Cette dernière condition est équivalente au fait que $\overset{m}{\wedge} \sigma$ est non nulle en tout point i.e. $\overset{m}{\wedge} \sigma$ est une *forme feuilletée volume*.

Le couple (\mathcal{F}, σ) définit une structure de Poisson Λ sur M dont le feuilletage caractéristique est égal à \mathcal{F} . En effet, parce que σ est de rang $2m$, il existe pour tout $f \in \Omega^0(M)$, un unique champ de vecteurs X_f tangent à \mathcal{F} tel que:

$$X_f \lrcorner \sigma = -\overline{df}$$

(où \overline{df} est la classe dans $\Omega^1(\mathcal{F})$ de $df \in \Omega^1(M)$); et le bivecteur Λ défini par

$$\Lambda(df, dg) = \sigma(X_f, X_g)$$

est une structure de Poisson dont les Hamiltoniens sont les champs X_f qui engendrent évidemment \mathcal{F} .

Réciproquement, si Λ est une structure de Poisson régulière de rang constant $2m$ sur une variété M de dimension $(2m + n)$, il existe un système de cartes locales

$$(V, x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m, z^1, \dots, z^n)$$

telles que:

- i) le feuilletage caractéristique \mathcal{F} de Λ est défini par les équations $dz^j = 0$;
- ii) en restriction à V , la forme symplectique sur les feuilles de \mathcal{F} s'écrit

$$\omega_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^m dx^i \wedge dy^i. \quad (\text{cf. [L] ou [W]}).$$

Le choix d'un supplémentaire de $T(\mathcal{F})$ permet d'étendre la famille $(\omega_{\mathcal{F}})$ en une 2-forme sur M dont la classe σ dans $\Omega^2(\mathcal{F})$ est une forme feuilletée symplectique indépendante du choix du supplémentaire.

En résumé, toute structure de Poisson, régulière Λ est exactement déterminée par la donnée d'un couple (\mathcal{F}, σ) où \mathcal{F} est un feuilletage régulier et σ est une 2-forme \mathcal{F} -feuilletée symplectique. Pour \mathcal{F} fixé, on dira que $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$ est *supportée* par \mathcal{F} et on désignera par $\text{Poiss}(\mathcal{F})$ l'espace des structures de Poisson de support \mathcal{F} .

1.3. Classe de cohomologie associée à $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$.

A toute structure de Poisson $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$ on associe la classe de cohomologie feuilletée

$$[\Lambda] = [\sigma] \in H^2(\mathcal{F})$$

et on dit que

- i) Λ est *présymplectique* si $[\Lambda] \in \text{Im} \{H^2(M) \rightarrow H^2(\mathcal{F})\}$ i.e. σ admet un représentant $\omega \in \Omega^2(M)$ qui est une forme fermée;
- ii) Λ est *exacte* si $[\Lambda] = 0$ i.e. σ admet un représentant ω qui est exact.

La classe $[\Lambda]$ joue pour les structures de Poisson de support \mathcal{F} le rôle joué par la classe de la forme symplectique pour les variétés symplectiques.

2. Lemme de Moser feuilleté

Classifier les structures de Poisson régulières de support (M, \mathcal{F}) fixé, va consister à étudier l'application

$$\begin{array}{ccc} \chi : \text{Poiss}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^2(M) \\ \Lambda & \longrightarrow & [\Lambda] \end{array}$$

Pour ce faire, on se servira d'une version *feuilletée* du lemme de Moser (cf. [M]).

2.1. Comparaison de structures $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$.

- i) Une famille à un paramètre de formes feuilletées étant définie par passage au quotient d'une famille à un paramètre de formes différentielles sur M , on dira que $\Lambda_t = (\mathcal{F}, \sigma_t)$, $t \in \mathbb{R}$, est une *famille à un paramètre de structures de Poisson cohomologues*, s'il existe une famille à un paramètre $\lambda_t \in \Omega^1(\mathcal{F})$ telle que

$$\sigma_t = \sigma_0 + d\lambda_t.$$

- ii) Par ailleurs, soit $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flot sur M engendré par un champ de vecteurs X tangent à \mathcal{F} . Alors, φ_t agit sur $\Omega^*(\mathcal{F})$ et si $\sigma \in \Omega^2(\mathcal{F})$ est symplectique, il en sera de même pour $\varphi_t^* \sigma$. On dira que $\varphi_t^* \sigma$ est une *famille de structures de Poisson isotopes*.

Pour t fixé, on vérifie immédiatement que l'opérateur d'homotopie associé à l'isotopie $(\varphi_{bt})_{b \in [0,1]}$ passe au quotient en un opérateur d'homotopie

$$H_t : \Omega^*(\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{*-1}(\mathcal{F})$$

qui vérifie:

$$\varphi_t^* - \text{id}^* = dH_t + H_t d.$$

Donc $\varphi_t^* \sigma - \sigma = dH_t \sigma$ et $\varphi_t^* \sigma$ est une famille à un paramètre de structures cohomologues.

On se propose maintenant de vérifier le réciproque dans le cas où M est compacte. Pour cela soient p la projection de $\mathbf{R} \times M$ sur M et $\hat{\mathcal{F}} = p^* \mathcal{F}$. Si $\alpha_t \in \Omega^r(\mathcal{F})$ est une famille à un paramètre de formes \mathcal{F} -feuilletées, on désigne par

$\hat{\alpha}_t \in \Omega^r(\hat{\mathcal{F}})$ la r -forme $\hat{\mathcal{F}}$ -feuilletée, de type $(0, r)$ relativement à la décomposition naturelle de $T(\mathbf{R} \times M)$ et égale à α_t en restriction à $\{t\} \times M$;

α'_t la famille à un paramètre de r -formes \mathcal{F} -feuilletées obtenue en dérivant par rapport à t les coefficients de α_t .

On a les relations:

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} (d\alpha_t)' = d(\alpha'_t) \text{ et } (\alpha_t)' = \hat{\alpha}'_t; \\ d\hat{\alpha}_t = \widehat{d\alpha}_t + dt \wedge \hat{\alpha}'_t. \end{cases}$$

De même si Y_t est une famille à un paramètre de champs de vecteurs sur M , on désignera par \hat{Y}_t le champ de vertical sur $\mathbf{R} \times M$ dont la restriction à $\{t\} \times M$ est donnée par Y_t .

2.2. Lemme. *Supposons M compacte. Pour toute famille à un paramètre $\sigma_t = \sigma_0 + d\lambda_t$ de structures de Poisson cohomologues, il existe un flot φ tangent à \mathcal{F} tel que*

$$\sigma_t = \varphi_t^* \sigma_0.$$

Démonstration: D'après (2.1.1), la 2-forme $\hat{\mathcal{F}}$ -feuilletée ω définie par

$$\omega = \hat{\sigma}_t + dt \wedge \hat{\lambda}'_t = \hat{\sigma}_0 + \widehat{d\lambda}_t + dt \wedge \hat{\lambda}'_t$$

s'écrit encore $\omega = \hat{\sigma}_0 + d\hat{\lambda}_t$; elle est donc fermée.

En outre, si X_t est le champ de vecteurs tangent à \mathcal{F} défini par l'équation

$$X_t \rfloor \sigma_t = -\lambda'_t,$$

on aura $X_t \rfloor \lambda'_t = 0$ et donc

$$\hat{X}_t \rfloor \omega = \hat{X}_t \rfloor \hat{\sigma}_t = -\hat{\lambda}'_t.$$

Par suite si $z = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{X}_t$, il vient:

$$Z \rfloor \omega = 0.$$

On en déduit que la dérivée de Lie $L_Z \omega$ est nulle; le flot $\hat{\varphi}_t$ engendré par Z préserve $\hat{\mathcal{F}}$ et ω et donc le flot φ_t sur M obtenu par projection de $\hat{\varphi}_t$ sur $M = \{0\} \times M$ est tel que $\varphi_t^* \sigma_0 = \sigma_t$ ■

En résumé, on obtient le lemme de Moser *feuilleté*:

2.3. Théorème. *Pour les structures de Poisson supportées par un feuilletage \mathcal{F} sur une variété compacte M , les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

- i) σ_t est une famille à un paramètre de structures cohomologues;
- ii) Il existe une isotopie φ tangente à \mathcal{F} telle que $\sigma_t = \varphi_t^* \sigma_0$.

Si \mathcal{F} est de dimension 2, une forme feuilletée symplectique est aussi une forme feuilletée volume qui définit une orientation de \mathcal{F} et on trouve un résultat plus précis:

2.4. Corollaire. *Si $\dim \mathcal{F} = 2$, deux structures de Poisson $\Lambda_i = (\mathcal{F}, \sigma_i)$, $i = 0, 1$, sont isotopes si et seulement si σ_0 et σ_1 définissent la même orientation de \mathcal{F} et*

$$[\sigma_0] = [\sigma_1] \in H^2(\mathcal{F}).$$

Démonstration: En effet, si σ_0 et σ_1 définissent la même orientation de \mathcal{F} et sont cohomologues dans $H^2(\mathcal{F})$, il existe une fonction $g > 0$ et $\lambda \in \Omega^1(\mathcal{F})$ tels que $\sigma_1 = g\sigma_0$ et $\sigma_1 - \sigma_0 = d\lambda$. Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\sigma_t = t\sigma_1 + (1-t)\sigma_0 = (tg + 1 - t)\sigma_0$$

est une forme feuilletée symplectique et

$$\sigma_t - \sigma_0 = t\sigma_1 - t\sigma_0 = td\lambda.$$

Donc $\Lambda_t = (\mathcal{F}, \sigma_t)$ est une famille à un paramètre de structures de Poisson cohomologues. On applique 2.3. (en se restreignant à l'intervalle $[0, 1]$) ■

2.5. Application: le cône $\mathcal{J}\text{Poiss}(\mathcal{F})$.

Si $\dim \mathcal{F} = 2$, toute forme feuilletée volume est une forme feuilletée symplectique et donc $\text{Poiss}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. En outre, d'après (2.3.), l'application χ identifie l'ensemble des classes d'isotopie de structures de Poisson avec l'image de χ qui est un cône ouvert de $H^2(\mathcal{F})$ que l'on désignera par $\mathcal{J}\text{Poiss}(\mathcal{F})$. Enfin dans les exemples du §3, on décrira plus précisément le cône $\mathcal{J}\text{Poiss}^+(\mathcal{F})$ des classes d'isotopie de structures de Poisson $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$ positives i.e. telles que l'orientation définie par σ coïncide avec une orientation préalablement fixée de \mathcal{F} .

3. Exemples

Pour finir, on va donc décrire le cône $\mathcal{J}\text{Poiss}^+(\mathcal{F})$ des classes d'isotopie de structures de Poisson positives supportées par certains feuilletages \mathcal{F} de dimension 2 sur une variété M .

3.1. Fibrations localement triviales à fibres compactes.

Supposons \mathcal{F} défini par une fibration localement triviale $\pi : M \rightarrow B$ à fibres compactes de dimension 2. L'intégration sur les fibres de π est une application linéaire surjective de $\Omega^2(M)$ sur $C^\infty(B)$ nulle sur $\Omega^2(M, \mathcal{F})$ donc induit un opérateur surjectif

$$f : \Omega^2(\mathcal{F}) \longrightarrow C^\infty(B)$$

dont le noyau est exactement $d\Omega^1(\mathcal{F})$. Il induit un isomorphisme

$$f^* : H^2(\mathcal{F}) \longrightarrow C^\infty(B).$$

qui identifie $\mathcal{J}\text{Pois}^+(\mathcal{F})$ avec le cône $C_+^\infty(B)$ des fonctions strictement positives sur B (la compacité de M dans 2.3. est remplacée ici par la compacité des fibres!)

3.2. Feuilletages linéaires de T^3 .

Soit \mathcal{F}_ω le feuilletage de T^3 défini par la 1-forme fermée, à coefficients constants, $\omega = \alpha dx + \beta dy + dz$ sur $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ et soit r le rang sur \mathbb{Q} du triplet $(\alpha, \beta, 1)$.

- i) Si $r = 1$, \mathcal{F}_ω est un fibré trivial de fibre T^2 et base \mathbb{S}^1 et d'après (3.1.), $\mathcal{J}\text{Pois}^+(\mathcal{F}_\omega)$ est un cône de dimension infinie;
- ii) si $r = 2$, toutes les feuilles de \mathcal{F}_ω sont des cylindres partout denses dans T^3 et il existe une fibration triviale,

$$\mathbb{S}^1 \longrightarrow T^3 \xrightarrow{\bar{u}} T^2$$

telle que $\omega = \bar{u}^*\eta$ où η est une 1-forme à coefficients constants sur T^2 du type. Par intégration sur les fibres de \bar{u} , on montre que $H^2(\mathcal{F}_\omega) \cong H^1(\mathcal{F}_\eta)$ et ce dernier groupe est de dimension 1 ou infinie suivant que α vérifie ou non une condition diophantienne. Donc $\mathcal{J}\text{Pois}^+(\mathcal{F}_\omega)$ sera suivant le cas de dimension 1 ou infinie.

- iii) le cas $r = 3$ sera analogue à $r = 2$ sauf que cette fois-ci les feuilles de \mathcal{F}_ω des plans et non plus des cylindres.

On remarquera que dans tous les cas, \mathcal{F}_ω n'admet pas de structure de Poisson exacte car si la forme feuilletée symplectique σ était représentée par $d\mu \in \Omega^2(T^3)$, alors $\sigma \wedge \omega = d(\mu \wedge \omega)$ serait une forme volume exacte sur la variété compacte T^3 .

3.3. Un exemple de structure de Poisson exacte sur une variété compacte.

Soient A le difféomorphisme linéaire de T^2 représenté par le matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et λ une valeur propre de cette matrice. Si $\eta = \alpha dx + dy$ est telle que $A^*\eta = \lambda\eta$ alors α est algébrique donc vérifie une condition diophantienne et le feuilletage \mathcal{F}_η défini par η est tel que $H^1(\mathcal{F}_\eta) = \mathbb{R}$.

Soit T_A^3 l'espace total du fibré en tores au-dessus de S^1 de monodromie A ; c'est le quotient de $\mathbf{R} \times T^2$ par l'action de \mathbf{Z} engendrée par le difféomorphisme $\tilde{A}(t, u) = (t + 1, A(u))$. On le munit du feuilletage \mathcal{F}_A obtenu par passage au quotient du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\eta = pr_2^* \mathcal{F}_\eta$. En procédant de façon tout à fait analogue à la situation classique, on construit une suite exacte de Wang en cohomologie feuilletée qui s'écrit:

$$\longrightarrow H^1(\mathcal{F}_\eta) \xrightarrow{A^* - I} H^1(\mathcal{F}_\eta) \longrightarrow H^2(\mathcal{F}_A) \rightarrow H^2(\mathcal{F}_\eta) \longrightarrow$$

Le générateur de $H^1(\mathcal{F}_\eta)$ est vecteur propre pour la valeur propre irrationnelle $1/\lambda$ donc $A^* - I \neq 0$ est un isomorphisme de $H^1(\mathcal{F}_\eta)$ sur lui-même et comme $H^2(\mathcal{F}_\eta) = 0$, il vient $H^2(\mathcal{F}_A) = 0$. Bref toute structure de Poisson supportée par \mathcal{F}_A est exacte.

3.4. Feuilletages avec cycles évanouissants.

Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte de dimension 3. D'après le théorème de Novikov, on sait que l'existence d'un cycle évanouissant non trivial est équivalente à l'existence d'une composante de Reeb (cf. [HH]). Or on montre dans [H. LV] que le second groupe de cohomologie feuilletée d'une telle composante est de dimension infinie; il en est donc de même pour tout feuilletage \mathcal{F} admettant un cycle évanouissant non trivial.

Comme conséquence $\mathcal{J}\text{Pois}^+(\mathcal{F})$ est de dimension infinie pour un tel \mathcal{F} .

References

- [HH] G. HECTOR AND U. HIRSCH, Introduction to the Geometry of foliations, *A and B*, Vieweg, (1981-83).
- [H. LV] G. HECTOR ET C. LASSO DE LA VEGA, Structures de Poisson régulières et cycles évanouissants, (à paraître).
- [L] A. LICHNÉROWICZ, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Diff. Geom.* **12** (1977), 253-300.
- [M] J. MOSER, On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer. math. Soc.* **120** (1965), 286-294.
- [W] A. WEISNTEIN, The local structure of Poisson manifolds, *J. Diff. Geom.* **18** (1983), 523-557.

G. Hector: URA CNRS 746
Institut de Mathématiques et Informatique
43 B. du 11 Novembre 1918
69622-Villeurbanne-Cedex
FRANCE

E. Macias: Facultad de Matemáticas
Universidad Santiago de Compostela
SPAIN

M. Saralegi: C/ Chantada 21, 1o .1a.
28029-Madrid
SPAIN

Rebut el 26 de Juliol de 1989