$$=\ln|\operatorname{tg} +\sec t|-\frac{1}{\operatorname{sen} t}+C=\ln|\operatorname{tg}t+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}|-$$
$$-\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg} t}+C=\ln|x+\sqrt{x^2+1}|-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C.$$

1191. Hallar las siguientes integrales, utilizando para ello las sustituciones indicadas:

a) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, $x=\frac{1}{t}$;

b) $\int\frac{dx}{e^x+1}$, $x=-\ln t$;

c) $\int x(5x^2-3)^7\,dx$, $5x^2-3=t$;

d) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$, $t=\sqrt{x+1}$;

e) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$, $t=\operatorname{sen} x$.

Hallar las integrales siguientes, empleando para ello las sustituciones más adecuadas:

1192. $\int x(2x+5)^{10}\,dx$

1193. $\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

1194. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}.$

1195. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

1196. $\int\frac{\ln 2x}{\ln 4x}\,\frac{dx}{x}.$

1197. $\int\frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

1198. $\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$

1199. $\int\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx.$

1200*. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

Hallar las siguientes integrales, empleando sustituciones trigonométricas:

1201. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1202. $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{2-x^2}}.$

1203. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx.$

1204*. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

1205. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx.$

1206*. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$

1207. $\int\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Poniendo $u=\ln x$; $dv=x\,dx$, tendremos $du=\frac{dx}{x}$; $v=\frac{x^2}{2}$. De donde,

$$\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\,\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

A veces, para reducir la integral dada a una inmediata, hay que emplear varias veces la fórmula de integración por partes. En algunos casos, valiéndose de la integración por partes, se obtiene una ecuación, de la que se determina la integral buscada.

Ejemplo 2. Hallar

$$\int e^x\cos x\,dx.$$

Tenemos

$$\int e^x\cos x\,dx=\int e^x\,d(\operatorname{sen}x)=e^x\operatorname{sen}x-\int e^x\operatorname{sen}x\,dx=e^x\operatorname{sen}x+$$
$$+\int e^x\,d(\cos x)=e^x\operatorname{sen}x+e^x\cos x-\int e^x\cos x\,dx.$$

Por consiguiente,

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\operatorname{sen}x+e^x\cos x-\int e^x\cos x\,dx,$$

de donde

$$\int e^x\cos x\,dx=\frac{e^x}{2}(\operatorname{sen}x+\cos x)+C.$$

Hallar las siguientes integrales, utilizando la fórmula para la integración por partes:

1211. $\int\ln x\,dx.$

1212. $\int\operatorname{arctg}x\,dx.$

1213. $\int\operatorname{arcsen}x\,dx.$

1214. $\int x\operatorname{sen}x\,dx.$

1215. $\int x\cos 3x\,dx.$

1216. $\int\frac{x}{e^x}\,dx.$

1217. $\int x\cdot 2^{-x}\,dx.$

1218**. $\int x^2e^{3x}\,dx.$

1219*. $\int(x^2-2x+5)\,e^{-x}\,dx.$

1220*. $\int x^3e^{-\frac{x}{3}}\,dx.$

1221. $\int x\operatorname{sen}x\cos x\,dx.$

1222*. $\int(x^2+5x+6)\cos 2x\,dx.$

1223. $\int x^2\ln x\,dx.$

1224. $\int\ln^2x\,dx.$

1225. $\int\frac{\ln x}{x^3}\,dx.$

1226. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

1227. $\int x\operatorname{arctg}x\,dx.$

1228. $\int x\operatorname{arcsen}x\,dx.$

1146. $\frac{1}{4}\ln|x^4-4x+1|$. 1147. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{5}}$. 1148. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$.
1149. $\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(x\sqrt{3}+\sqrt{2+3x^2})$. 1150. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|$. 1151. $-\frac{2}{\sqrt{e^x}}$. 1152. $\ln|x+\cos x|$.
1153. $\frac{1}{3}\left(\ln|\sec 3x+\operatorname{tg}3x|+\frac{1}{\operatorname{sen}3x}\right)$. 1154. $-\frac{1}{\ln x}$. 1155. $\ln|\operatorname{tg}x+\sqrt{\operatorname{tg}^2x-2}|$. 1156. $\sqrt{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2})-\frac{1}{4(2x^2+1)}$. 1157. $\frac{a^{\operatorname{sen}x}}{\ln a}$.
1158. $\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{2}$. 1159. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x^2)$. 1160. $\frac{1}{a}\operatorname{tg}ax-x$. 1161. $\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}x}{2}$.
1162. $\operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{tg}x}{2}$. 1163. $a\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2a}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 1164. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}$.
1165. $-2\ln|\cos\sqrt{x-1}|$. 1166. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}\right|$. 1167. $e^{\operatorname{arctg}x}+\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}+\operatorname{arctg}x$. 1168. $-\ln|\operatorname{sen}x+\cos x|$. 1169. $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|-2x-\sqrt{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$. 1170. $x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$. 1171. $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x$.
1172. $e^{\operatorname{sen}^2x}$. 1173. $\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}\frac{x\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4-3x^3}$. 1174. $x-\ln(1+e^x)$.
1175. $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}x\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. 1176. $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-2})$. 1177. $\frac{1}{a}\ln|\operatorname{tg}ax|$.
178. $-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$. 1179. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|$. 1180. $-\frac{\left(\arccos\frac{x}{2}\right)^2}{2}$.
1181. $-e^{-\operatorname{tg}x}$. 1182. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}^2x}{\sqrt{2}}\right)$. 1183. $-2\operatorname{ctg}2x$. 1184. $\frac{(\operatorname{arcsen}x)^2}{2}-\sqrt{1-x^2}$. 1185. $\ln(\sec x+\sqrt{\sec^2x+1})$. 1186. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{sen}2x}{\sqrt{5}-\operatorname{sen}2x}\right|$.
1187. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$. Indicación. $\int\frac{dx}{1+\cos^2x}=\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^2x+2\cos^2x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{\operatorname{tg}^2x+2}$. 1188. $\frac{2}{3}\sqrt{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3}$. 1189. $\frac{1}{3}\operatorname{sh}(x^3+3)$.
1190. $\frac{1}{\ln 3}3^{\operatorname{th}x}$. 1191. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}$ cuando $x>\sqrt{2}$. b) $-\ln(1+e^{-x})$; c) $\frac{1}{80}(5x^2-3)^8$; d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}$; e) $\ln(\operatorname{sen}x+\sqrt{1+\operatorname{sen}^2x})$
1192. $\frac{1}{4}\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right]$. 1193. $2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln|1+\sqrt{x}|\right)$.
1194. $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$. 1195. $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$. 1196. $\ln x-\ln 2\ln|\ln x+2\ln 2|$.

1197. $\frac{(\operatorname{arcsen} x)^3}{3}$. 1198. $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}$. 1199. $\frac{2}{5}(\cos^2 x-5)\sqrt{\cos x}$.
1200. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|$. Indicación. Poner $x=\frac{1}{t}$. 1201. $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+$ $+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x$. 1202. $-\frac{x^2}{3}\sqrt{2-x^2}-\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}$. 1203. $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}$.
1204. $\arccos\frac{1}{x}$, si $x>0$, y $\arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$, si $x<0$*). Indicación. Poner $x=\frac{1}{t}$. 1205. $\sqrt{x^2+1}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. 1206. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$. Observación. En lugar de la sustitución trigonométrica se puede utilizar la sustitución $x=\frac{1}{z}$. 1207. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x$.
1208. $2\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$. 1210. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$. 1211. $x\ln x-x$.
1212. $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 1213. $x\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}$. 1214. $\operatorname{sen} x-x\cos x$.
1215. $\frac{x\operatorname{sen} 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}$. 1216. $-\frac{x+1}{e^x}$. 1217. $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}$.
1218. $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)$. Resolución. En lugar de integrar repetidamente por partes, se puede emplear el siguiente procedimiento de coeficientes indeterminados

$$\int x^2e^{3x}\,dx=(Ax^2+Bx+C)\,e^{3x}$$

o, después de derivar,

$$x^2e^{3x}=(Ax^2+Bx+C)\,3e^{3x}+(2Ax+B)\,e^{3x}.$$

Simplificando por e^{3x} e igualando entre sí los coeficientes que figuran con las mismas potencias de x, obtenemos:

$$1=3A;\quad 0=3B+2A;\quad 0=3C+B,$$

de donde $A=\frac{1}{3}$; $B=-\frac{2}{9}$; $C=\frac{2}{27}$. En la forma general $\int P_n(x)\,e^{\alpha x}\,dx=$ $=Q_n(x)\,e^{\alpha x}$, donde $P_n(x)$ es el polinomio dado de grado n y $Q_n(x)$ un polinomio de grado n con los coeficientes indeterminados. 1219. $-e^{-x}(x^2+5)$. Indicación. Véase el problema 1218*. 1220. $-3e^{-\frac{x}{3}}(x^3+9x^2+54x+162)$. Indicación. Véase el problema 1218*. 1221. $-\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{8}$.
1222. $\frac{2x^2+10x+11}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{2x+5}{4}\cos 2x$ Indicación. También se recomienda utilizar el método de los coeficientes indeterminados en la forma

$$\int P_n(x)\cos\beta x\,dx=Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\operatorname{sen}\beta x,$$

---

*) En lo sucesivo, en casos análogos, se indicará a veces una respuesta que corresponda solamente a una parte cualquiera del campo de existencia de la función subintegral.