Ecuaciones cuaterniónicas

por

Daniel Cao Labora, Enrique Macías Virgós, Miguel A. Regueiro Torres

Resumen. En este trabajo revisaremos algunos métodos conocidos de resolución de ecuaciones cuaterniónicas, comenzando por las lineales y siguiendo por las cuadráticas, la extracción de raíces n-ésimas y la resolución de ecuaciones unilaterales de cualquier grado. La mayoría de los resultados que presentamos son posteriores al año 2000. Daremos también una versión del Teorema Fundamental del Álgebra en los cuaternios.

1. Introducción

Los cuaternios son un álgebra de división unitaria, asociativa (y en consecuencia un cuerpo, aunque no conmutativo), normada, de dimensión 4 sobre los reales, que denotaremos $\mathbb{H} = \langle 1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$. Fueron inventados por William R. Hamilton en 1843 en su búsqueda de maneras de extender los números complejos a un número mayor de dimensiones. Desde su descubrimiento se han aplicado a distintos campos de la ciencia como la mecánica clásica, la mecánica cuántica, la teoría de la relatividad, el electromagnetismo y la cristalografía [5]. Son útiles en teoría de números (véase la elegante demostración del "Teorema de los cuatro cuadrados" de Lagrange en [16]) y aparecen en muchas otras ramas de las Matemáticas. Sin embargo, donde los cuaternios son más útiles es en la representación de una rotación en la cinemática del cuerpo rígido. La posibilidad de representar la orientación de un objeto en tres dimensiones mediante un único cuaternio tiene aplicaciones tanto en los sistemas de posicionamiento tridimensional de muchas máquinas (por ejemplo, drones) como en el modelizado en Biología de la configuración geométrica de las proteínas. En estos últimos años han sido utilizados también en el desarrollo de tecnología aeroespacial, la robótica, el diseño gráfico y la codificación de colores en visión por ordenador, y para simuladores o videojuegos de última generación, ver [6, 12].

Un problema interesante, y sólo parcialmente resuelto, es el estudio de ecuaciones algebraicas cuaterniónicas. Es sabido que, en general, un polinomio cuaterniónico arbitrario puede no tener raíces (por ejemplo, la ecuación $\mathbf{i}\xi + \xi\mathbf{j} = 1$, con incógnita ξ, no tiene solución), aunque existe un teorema fundamental del álgebra (TFA) para polinomios que tengan un único término de mayor grado [3]. Otros polinomios cuaterniónicos pueden tener infinitos ceros. Así, la ecuación $\xi^2 + 1 = 0$ tiene por soluciones todos los cuaternios con parte real 0 y norma 1.

En este trabajo revisaremos algunos métodos conocidos de resolución de ecuaciones cuaterniónicas. Daremos también una versión del Teorema Fundamental del Álgebra en los cuaternios.

2. Los cuaternios

En este capítulo se da una definición de lo que son los cuaternios, así como las reglas para operar con ellos. Posteriormente se demuestran una serie de propiedades elementales, necesarias para los siguientes capítulos. La referencia que seguiremos es el trabajo de Zhang [18].

Un *cuaternio* es una combinación lineal de la forma

$$q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{1}$$

donde t, x, y, z son números reales. Se definen $\Re(q) = t$ como la *parte real* (o escalar) e $\Im(q) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ como la *parte imaginaria* (o vectorial) de q.

El conjunto de los cuaternios lo denotaremos por $\mathbb{H}$. Podemos identificarlo, como espacio vectorial, con $\mathbb{R}^4$, donde $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es una base. De la propia definición resulta evidente cómo realizar la suma de dos cuaternios, así como la multiplicación de un cuaternio por un escalar. Para definir el producto entre dos elementos de $\mathbb{H}$ se utilizan las siguientes *reglas de Hamilton*:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$$

Se sigue, por ejemplo, utilizando que el producto es asociativo y sin divisores de cero, que $\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}$. Utilizando la propiedad distributiva, y que los reales conmutan con todos los cuaternios, tenemos determinado el producto de dos cuaternios cualquiera.

Ejemplo 1. Sean $q_1 = 2+3\mathbf{i}-5\mathbf{j}$, $q_2 = 1-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Entonces $q_1q_2 = 23-6\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

Se define el *conjugado* del cuaternio en (1) como $\overline{q} = t - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k} \in \mathbb{H}$. Entonces

$$q\overline{q} = \overline{q}q = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = |q|^2,$$

donde $|q|$ es la norma euclídea en $\mathbb{R}^4$. Si $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ se cumple: $\overline{q_1q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$ y $|q_1q_2| = |q_1||q_2|$. Por tanto todo cuaternio no nulo $q \neq 0$ tiene inverso, explícitamente $q^{-1} = \overline{q}/|q|^2$.

Denotemos por $\mathbb{H}_0$ el subconjunto de $\mathbb{H}$ formado por los cuaternios con parte real nula. En ocasiones escribiremos un cuaternio como la suma de su parte real y su parte imaginaria, es decir $q = t + v$, con $t \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{H}_0$.

Definición 2. Dos cuaternios q_1 y q_2 se dicen *similares*, $q_1 \sim q_2$, si existe $u \in \mathbb{H}$, $u \neq 0$, tal que $q_2 = uq_1u^{-1}$.

El siguiente resultado es fundamental:

Teorema 3. *Dos cuaternios q_1 y q_2 son similares si y sólo si tienen la misma norma y la misma parte real.*

Demostración. Sea $q_1 = t+v$. Se tiene $|q_1|^2 = t^2+|v|^2$ y $q_2 = uq_1u^{-1} = t+uvu^{-1}$. De ahí se sigue una implicación. Para la recíproca bastará probar que todo cuaternio $v \in \mathbb{H}_0$ es similar a $|v|\mathbf{i}$. Sea $v = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y tomemos $u = (|v| + x) - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; se cumple $vu = u|v|\mathbf{i}$. □

Como consecuencia del teorema anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4. *Representemos un cuaternio $q = t + v$ como suma de su parte real $t \in \mathbb{R}$ y de su parte imaginaria $v \in \mathbb{H}_0$. Entonces $q \sim t \pm |v|\mathbf{i}$. En particular, todo cuaternio no real es similar a dos números complejos conjugados.*

Finalmente,

Proposición 5. *Sea $q \in \mathbb{H}$, entonces q y $\overline{q}$ son las soluciones de la ecuación*

$$\xi^2 - 2\Re(q)\xi + |q|^2 = 0.$$

Cuando q es un cuaternio no real puede demostrarse que el polinomio anterior, que denotaremos $d_q(\xi)$, divide a cualquier polinomio de mayor grado, con coeficientes reales, que tenga q como cero. El motivo es que el morfismo $\mathbb{R}[\xi] \to \mathbb{H}$ que evalúa el valor de cada polinomio en q tiene por núcleo un ideal principal, generado por $d_q(\xi)$.

Corolario 6. *Los cuaternios similares a $\mathbf{i}$ son aquellos $w \in \mathbb{H}$ tales que $\Re(w) = 0$ y $|w| = 1$, es decir, los de la forma $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Son las soluciones de la ecuación $\xi^2 + 1 = 0$.*

Con frecuencia escribiremos un cuaternio arbitrario como $q = s + tw$, $s, t \in \mathbb{R}$, donde w verifica que $\Re(w) = 0$ y $|w| = 1$. Esta escritura facilitará los cálculos en muchas demostraciones. Nótese que si $q \notin \mathbb{R}$ la subálgebra generada por q es $\langle 1, w \rangle$, que es isomorfa a $\mathbb{C}$.

3. Ecuaciones cuaterniónicas lineales

Comenzaremos estudiando cómo se resuelve una ecuación lineal, basándonos en el trabajo realizado por Janovská y Opfer en [8] y por Macías y Pereira en [9].

La resolución de este tipo de ecuaciones no siempre es sencilla. Así, por ejemplo, en la ecuación $\mathbf{i}\xi - \xi\mathbf{j} = 1$ tendremos dificultades para despejar la incógnita ξ. Buscaremos un procedimiento para resolver ecuaciones del tipo

$$p_1\xi q_1 + \cdots + p_n\xi q_n = r, \qquad p_i, q_i, r \in \mathbb{H}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2}$$

Definición 7. Dados $p, q \in \mathbb{H}$, definimos las siguientes aplicaciones de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$:

- $L(p)\colon \xi \mapsto p\xi$, es la aplicación "multiplicar por la izquierda",
- $R(q)\colon \xi \mapsto \xi q$, es la aplicación "multiplicar por la derecha".

Teniendo en cuenta que $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4 = \langle 1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, es claro que ambas aplicaciones son $\mathbb{R}$-lineales. Y por tanto tendrán asociada una matriz, que denotaremos también por $L(p)$ y $R(q)$, respectivamente. Veamos cuales son estas matrices.

Proposición 8. *Sea $p = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{H}$, entonces la matriz asociada a $L(p)$ es*

$$L(p) = \begin{bmatrix} t & -x & -y & -z \\ x & t & -z & y \\ y & z & t & -x \\ z & -y & x & t \end{bmatrix}.$$

De la misma forma, si $q = s + u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \in \mathbb{H}$, la matriz asociada a $R(q)$ es

$$R(q) = \begin{bmatrix} s & -u & -v & -w \\ u & s & w & -v \\ v & -w & s & u \\ w & v & -u & s \end{bmatrix}.$$

El resultado clave ahora es que, aunque los cuaternios no son conmutativos, por la *asociatividad* de los cuaternios tenemos que $p(\xi q) = (p\xi)q$, con lo que ambas matrices conmutan. Es decir se tiene que $L(p) \circ R(q) = R(q) \circ L(p)$. Denotaremos por $\hat{p}$ el vector de $\mathbb{R}^4$ asociado a $p \in \mathbb{H}$. Con las notaciones anteriores, resolver la ecuación (2) será equivalente a resolver un sistema de ecuaciones reales, en forma matricial $M \cdot \hat{\xi} = \hat{r}$, donde $\hat{\xi}$ y $\hat{r}$ son vectores de $\mathbb{R}^4$ y

$$M = L(p_1)R(q_1) + \cdots + L(p_n)R(q_n). \tag{3}$$

EJEMPLO 9. Resolver la ecuación lineal (de Sylvester) $\mathbf{i}\xi + \xi\mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Tenemos que $p_1 = \mathbf{i},\ p_2 = 1,\ q_1 = 1,\ q_2 = \mathbf{j}$. Al calcular la matriz M del sistema obtenemos

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que tiene rango 2, al igual que la matriz ampliada con la columna $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Por tanto el sistema es compatible indeterminado y tendrá infinitas soluciones. Si suponemos $\hat{\xi} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T$ obtenemos $a = d+1$, $b = -c$. Así, las soluciones de la ecuación serán todos los cuaternios de la forma $\xi = \lambda + \mu(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + (\lambda - 1)\mathbf{k}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

4. ECUACIONES CUATERNIÓNICAS DE GRADO 2

Para el desarrollo de este capítulo nos basaremos en el trabajo realizado por Huang y So [7] y en su método de resolución de ecuaciones cuadráticas con cuaternios. Au-Yeung obtuvo resultados análogos en [17].

Nos restringiremos al caso unilateral, es decir, solamente vamos a tratar el caso en el que la ecuación sea de la forma $a\xi^2 + b\xi + c = 0$, con $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{H}$, o, sin pérdida de generalidad, dividiendo por a,

$$\xi^2 + b\xi + c = 0, \quad b, c \in \mathbb{H}. \tag{4}$$

Resaltemos que no se puede resolver como en el caso real o complejo, debido a la no conmutatividad de los cuaternios. Detallaremos las distintas posibilidades que se pueden presentar, dando fórmulas explícitas para las soluciones.

El argumento siguiente permitirá simplificar muchos de los razonamientos dados originalmente por Huang y So. Agradecemos a un revisor anónimo el habernos sugerido este enfoque.

Sea $\xi \in \mathbb{H}$ una solución de la ecuación (4), y llamemos

$$T = 2\Re(\xi) = \xi + \overline{\xi}, \quad N = |\xi|^2 = \xi \cdot \overline{\xi}. \tag{5}$$

Entonces $\xi^2 - T\xi + N = 0$ por la Proposición 5. Restando ambas ecuaciones, obtenemos $(b+T)\xi + (c-N) = 0$, de donde se deduce que o bien $b + T \neq 0$ o bien $b, c \in \mathbb{R}$. En el primer caso

$$\xi = -(b+T)^{-1}(c-N), \tag{6}$$

con lo que ξ está en la subálgebra $\langle b, c\rangle$ generada por b y c y bastará resolver en ella la ecuación (4).

Las ecuaciones también pueden resolverse por un método completamente diferente, que presentaremos en la Sección 6.

4.1. Caso en el que b, c son números reales

En este caso, si ξ es solución de la ecuación (4), todo cuaternio q similar a ξ también lo será, ya que si $q = u\xi u^{-1}$ entonces

$$q^2 + bq + c = u(\xi^2 + b\xi + c)u^{-1} = 0.$$

Resolviendo la Ecuación (4) en los complejos, tendremos:

1. Si $b^2 - 4c \geq 0$, entonces hay una o dos soluciones reales (un cuaternio real sólo es similar a sí mismo).
2. Si $b^2 - 4c < 0$, entonces $\xi = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{4c - b^2}\,\mathbf{i})$ es solución y por tanto lo serán también todos los cuaternios de la forma

   $$\xi = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{4c - b^2}\, w),$$

   con $w \in \mathbb{H}$ similar a $\mathbf{i}$, con lo que tendremos infinitas soluciones.

4.2. Caso de $b \in \mathbb{R}$, $c \notin \mathbb{R}$

En este caso la ecuación va a tener dos soluciones. En efecto, por lo dicho tras la Proposición 5, la subálgebra $\langle b, c\rangle$ será isomorfa a $\mathbb{C}$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 10. Resolver la ecuación $\xi^2 - \xi + \mathbf{k} = 0$.

En este caso $b = -1$, $c = \mathbf{k}$ y $\xi \in \langle b, c\rangle = \langle 1, \mathbf{k}\rangle \cong \mathbb{C}$. Por tanto

$$\xi = (1 \pm \sqrt{1 - 4\mathbf{k}})/2$$

y basta resolver $(s + t\mathbf{k})^2 = 1 - 4\mathbf{k}$, con $s, t \in \mathbb{R}$ (en la Sección 5 explicaremos cómo calcular raíces cuadradas en los cuaternios en el caso general). Se obtiene $s = \dfrac{\varepsilon\sqrt{1+\sqrt{17}}}{\sqrt{2}}$ y $t = \dfrac{-2\varepsilon\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}}$, con $\varepsilon = \pm 1$.

En general, cuando la subálgebra $\langle b, c\rangle$ sea isomorfa a $\mathbb{C}$ procederemos del mismo modo. Por tanto basta estudiar el caso en que $\langle b, c\rangle = \mathbb{H}$, lo que implica que $b \notin \mathbb{R}$.

4.3. CASO DE $b \notin \mathbb{R}$

En primer lugar podemos suponer que $\Re(b) = 0$ y $|b| = 1$. En efecto, si $b = s+tw$, llamando $\mu = \frac{1}{t}(\xi + \frac{s}{2})$ se obtiene una ecuación del tipo $\xi^2 + w\xi + c' = 0$. Además podemos suponer que $b = \mathbf{i}$, ya que si $b = q\mathbf{i}q^{-1}$ (Teorema 3), haremos el cambio de variable $\mu = q\xi q^{-1}$. Nótese que el valor de q puede obtenerse resolviendo la ecuación lineal $bq - q\mathbf{i} = 0$ por el método dado en la Sección 3.

Usaremos las siguientes ecuaciones con coeficientes reales, que son una consecuencia de las ecuaciones en (5) cuando se sustituye en ellas el valor de (6):

$$\begin{aligned} &T^3 + (B - 2N)T + D = 0, \\ &N^2 - (B + T^2)N + E = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

donde hemos hecho los siguientes cambios de variable (para $b = \mathbf{i}$):

$$\begin{aligned} B &= 1 + 2\Re(c) \in \mathbb{R}, \\ E &= |c|^2 \in \mathbb{R}, \\ D &= -c\mathbf{i} + \mathbf{i}\bar{c} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Veremos que el sistema (7) tiene, como mucho, dos soluciones que cumplan que T y N sean reales y además $N \geq 0$. Es decir, como mucho tendremos dos soluciones para la ecuación de segundo grado (4). Para eso necesitaremos el siguiente resultado.

LEMA 11. *Si $B < 0$ entonces $B^2 - 4E < 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $B < 0$ entonces $c + \bar{c} < -1$ y $(c - \bar{c})^2 = -|c - \bar{c}|^2 \leq 0$. Luego concluimos que

$$B^2 - 4E = B + (c + \bar{c}) + (c - \bar{c})^2 < 0. \quad \square$$

Pasamos a resolver el sistema (7).

PROPOSICIÓN 12. *Si $D \neq 0$, las soluciones del sistema* (7) *vendrán dadas por:*

$$T = \pm\sqrt{z}, \quad N = \frac{T^3 + BT + D}{2T},$$

donde z es la única solución real positiva de

$$z^3 + 2Bz^2 + (B^2 - 4E)z - D^2 = 0. \tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, en la primera parte de (7) despejamos $N = (T^3 + BT + D)/(2T)$. Sustituyendo en la segunda parte, y haciendo las cuentas necesarias, llegamos a que

$$T^6 + 2BT^4 + (B^2 - 4E)T^2 - D^2 = 0.$$

Si llamamos $z = T^2$ obtenemos la ecuación $P(z) = 0$ de (9). Veamos que esta ecuación tiene exactamente una solución real positiva.

En efecto, si hubiese una raíz real t_1 y dos complejas conjugadas, sería $D^2 = t_1 z\bar{z} = t_1|z|^2$, y se sigue que $t_1 > 0$. Si las tres soluciones fuesen reales, digamos t_1, t_2, t_3, debe cumplirse que $P(z) = (z-t_1)(z-t_2)(z-t_3)$, luego $D^2 = t_1t_2t_3$, de lo que se deduce que al menos una de las tres soluciones es positiva. Supongamos que es $t_1 > 0$, entonces $t_2t_3 > 0$, es decir, t_2 y t_3 tienen el mismo signo. Comparando los coeficientes en $P(z)$ tendremos

$$B^2 - 4E = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3, \tag{10}$$

$$-2B = t_1 + t_2 + t_3. \tag{11}$$

Si $t_2, t_3 > 0$ tendríamos, por (11), que $B < 0$ y entonces $B^2 - 4E < 0$ por el Lema 11; pero esto es una contradicción, pues $B^2 - 4E > 0$ por (10). Por tanto, $t_2, t_3 < 0$, y la única raíz positiva es t_1. □

Ejemplo 13. Resolver la ecuación cuaterniónica $\xi^2 + \mathbf{i}\xi + (1 + \mathbf{i} + \mathbf{j}) = 0$.

En este caso, $b = \mathbf{i}$ y $c = 1 + \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Los cambios de variable de (8) dan $B = 3$, $E = 3$ y $D = 2$. Por la Proposición 12 tenemos que $T = \pm\sqrt{z}$, donde z es la única solución real positiva de la ecuación $z^3 + 6z^2 - 3z - 4 = 0$, es decir, $z = 1$. Por tanto, $T = \pm 1$. Y utilizando de nuevo la Proposición 12 para calcular N tenemos que, si $T = 1$ entonces $N = 3$; y si $T = -1$ entonces $N = 1$. Luego tendremos dos soluciones, que, de acuerdo con (6), vendrán dadas por

- $\xi_1 = -(\mathbf{i}+1)^{-1}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3) = \dfrac{-1}{2}(-1 + 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$,
- $\xi_2 = -(\mathbf{i}-1)^{-1}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} - 1) = \dfrac{1}{2}(-1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

Proposición 14. *Si $D = 0$, las soluciones del sistema (7) serán:*

1. $T = 0,\ N = \dfrac{1}{2}(B \pm \sqrt{B^2 - 4E}),$ *si* $B^2 - 4E \geq 0$,
2. $T = \sqrt{2\sqrt{E} - B},\ N = +\sqrt{E},$ *si* $B^2 - 4E < 0$.

Demostración. Es claro que $T = 0$ es solución, y el valor de N correspondiente sale de la ecuación $N^2 - BN + E = 0$. Notemos que $N \geq 0$ ya que $B^2 \geq B^2 - 4E$ porque $E \geq 0$, y por tanto $B \geq \sqrt{B^2 - 4E}$, pues $B \geq 0$ por el Lema 11.

Veamos si hay más soluciones con $T \neq 0$ (y $N \geq 0$, como ya hemos comentado). Como $T^2 + B - 2N = 0$ sustituimos $T^2 = 2N - B$ en la segunda ecuación de (7) y queda $N = +\sqrt{E}$. Por tanto, $T^2 = 2\sqrt{E} - B$, que será positivo; en efecto, o bien $B < 0$, con lo que es inmediato, o bien $B \geq 0$, y entonces el carácter positivo se deduce de $B^2 - 4E < 0$. □

Daremos un ejemplo de este caso más adelante (Subsección 6.3), para compararlo con otro método.

5. Raíces

En esta sección abordamos el problema de encontrar las raíces n-ésimas de un cuaternio dado, para $n \geq 2$. El primero en resolverlo fue Niven [13], que consiguió reducirlo a un problema en los complejos, pero seguiremos un camino diferente. Probaremos que si $n \geq 2$, todo cuaternio no real tiene exactamente n raíces n-ésimas. En el caso de $q \in \mathbb{R}$ siempre aparecen infinitas raíces, excepto cuando $n = 2$ y el radicando q es positivo (caso en el que se mantiene la regla general y hay dos raíces).

Recordemos antes de nada que la existencia de infinitas raíces cuadradas es un problema específico del caso no conmutativo.

PROPOSICIÓN 15. *En un cuerpo conmutativo K todo elemento $a \in K$ tiene como mucho dos raíces cuadradas.*

DEMOSTRACIÓN. Si a no tiene raíces el resultado es trivialmente cierto. Supongamos que x es una raíz cuadrada de a. Si existe una segunda raíz y, tenemos $a = x^2 = y^2$ y deducimos, al estar en un cuerpo conmutativo, que $(x - y)(x + y) = 0$, lo que obliga a que $y = \pm x$, terminando la prueba. $\square$

LEMA 16 (Niven). *Dado un cuaternio q y dado un entero positivo cualquiera $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $\Im(q^n) = \lambda_n \Im(q)$.*

DEMOSTRACIÓN. Mejoraremos el resultado original dando una expresión explícita para el escalar λ_n. Si $q \in \mathbb{R}$ el resultado es evidente. Supongamos por tanto $q \notin \mathbb{R}$. Podemos escribir

$$q = |q|(\cos\theta + w \operatorname{sen}\theta),$$

donde w es unitario y sin parte real, y θ es el ángulo que forma q con el eje real en el plano $\langle 1, w\rangle$. Por ser q no real tenemos $\operatorname{sen}\theta \neq 0$. De hecho, para expresar cada cuaternio no real de modo único con estas coordenadas polares asumiremos que el ángulo θ está en el intervalo $(0, \pi)$. Ahora, usando que $w^2 = -1$, es fácil probar por inducción en n que

$$q^n = |q|^n(\cos n\theta + w \operatorname{sen} n\theta). \tag{12}$$

De este modo demostramos el Lema pues

$$\lambda_n = |q|^{n-1}\frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta}. \quad \square$$

TEOREMA 17. *Si $n \geq 1$, todo cuaternio $q \notin \mathbb{R}$ tiene exactamente n raíces n-ésimas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $q \in \mathbb{H}$ de la forma $q = s + tw$ y sea $\alpha \in \mathbb{H}$ tal que $\alpha^n = q$. Como $\alpha \notin \mathbb{R}$, la subálgebra $\langle\alpha\rangle$ generada por α es isomorfa a $\mathbb{C}$. Como q está en $\langle\alpha\rangle$, se tiene que la subálgebra generada por q (que también es isomorfa a $\mathbb{C}$) coincide con $\langle\alpha\rangle$. Así pues, las raíces de un cuaternio no real están en la subálgebra generada por dicho cuaternio, y el cálculo de raíces se reduce al cálculo de raíces en $\mathbb{C}$. $\square$

A continuación añadimos un ejemplo práctico para familiarizarse con el método de Niven [13] de extracción de raíces de un cuaternio no real.

Ejemplo 18. Calcular las raíces cúbicas de $q = 1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Por el Teorema 17 sabemos que habrá tres raíces cúbicas. Escribiendo en forma polar

$$q = 2(\cos\frac{\pi}{3} + w \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}),$$

con $w = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$ tenemos que las raíces serán de la forma

$$\alpha_l = \sqrt[3]{2}(\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2l\pi}{3}\right) + w \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2l\pi}{3}\right)), \quad l \in \{0, 1, 2\}.$$

Teorema 19. *Todo real no nulo tiene infinitas raíces n-ésimas, excepto si es positivo y $n = 2$.*

Demostración. El cálculo de las raíces cuadradas de un número real t es un caso particular de la ecuación $q^2 - t = 0$ vista en la Subsección 4.1. Si $t > 0$ las dos raíces son las reales, $\pm\sqrt{t}$. Si $t < 0$ hay infinitas raíces cuadradas, de la forma $\sqrt{-t}\,w$, donde $\Re(w) = 0$ y $|w| = 1$.

Veamos entonces el caso $n > 2$. Sea $\alpha \in \mathbb{H}$ de la forma $\alpha = |\alpha|(\cos\gamma + v \operatorname{sen}\gamma)$, tal que $\alpha^n = t$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos las raíces reales de t, si existen. Y si $\alpha \notin \mathbb{R}$, entonces $v \neq 0$ y la subálgebra $\langle\alpha\rangle$ generada por α coincide con $\langle 1, v\rangle$, que es isomorfa a $\mathbb{C}$, con lo que resolveremos en los complejos y tendremos n soluciones. Como v se mueve con total libertad en los cuaternios puros de norma uno tendremos infinitas soluciones. □

6. Ecuaciones cuaterniónicas de grado n

En esta parte daremos un procedimiento general para resolver ecuaciones unilaterales de grado n, que reduce el problema a encontrar los autovalores de una matriz M, llamada "matriz compañera". De hecho sólo será necesario el cálculo de los autovalores complejos de M para saber todas las soluciones de la ecuación. Nos basaremos en el estudio hecho por De Leo, Ducati y Leonardi [2] sobre este tema, que se discute también en [10].

Definición 20. Una ecuación cuaterniónica unilateral de grado n es una expresión del tipo

$$\xi^n - a_{n-1}\xi^{n-1} - \cdots - a_1\xi - a_0 = 0, \quad a_s \in \mathbb{H}, \quad 0 \leq s \leq n-1. \tag{13}$$

6.1. Matriz compañera

Llamaremos *matriz compañera* del polinomio $\xi^n - \sum_{s=0}^{n-1} a_s\xi^s$ a la matriz siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^{n\times n}.$$

Veamos la relación que existe entre los autovalores de esta matriz y las soluciones de la ecuación (13).

DEFINICIÓN 21. Diremos que $\lambda \in \mathbb{H}$ es un autovalor (por la derecha) de la matriz M si existe $\vec{v} \in \mathbb{H}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, que cumpla que $M\vec{v} = \vec{v}\lambda$.

El vector $\vec{v}$ será un *autovector* (o vector propio) asociado al autovalor λ. Nótese que ponemos los escalares a la derecha. Una particularidad de la no conmutatividad es que los autovectores asociados a un autovalor no forman un espacio vectorial. La situación es algo más complicada, como prueba el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 22. *Sea λ_1 un autovalor de M con autovector $\vec{v}$. Si $\lambda_2 \in \mathbb{H}$ es similar a λ_1, es decir, $\lambda_2 = u\lambda_1 u^{-1}$, $u \neq 0$, entonces λ_2 también es autovalor de M, con autovector $\vec{v}u^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$M(\vec{v}u^{-1}) = (M\vec{v})u^{-1} = (\vec{v}\lambda_1)u^{-1} = \vec{v}(u^{-1}\lambda_2 u)u^{-1} = (\vec{v}u^{-1})\lambda_2. \qquad \square$$

LEMA 23. *Si M es una matriz compañera y $\vec{v} = \begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n\end{bmatrix}^T \neq \vec{0}$ es un autovector, entonces su última coordenada, φ_n, es distinta de 0.*

DEMOSTRACIÓN. La condición $M\vec{v} = \vec{v}\lambda$ significa

$$\begin{aligned} a_{n-1}\varphi_1 + a_{n-2}\varphi_2 + \cdots + a_1\varphi_{n-1} + a_0\varphi_n &= \varphi_1\lambda, \\ \varphi_1 &= \varphi_2\lambda, \\ &\dots \\ \varphi_{n-1} &= \varphi_n\lambda. \end{aligned} \tag{14}$$

Si $\varphi_n = 0$, entonces todos los φ_i serían 0 y por tanto $\vec{v} = \vec{0}$, lo cual es una contradicción. $\square$

LEMA 24. *Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un λ-autovector entonces $\vec{v} = \varphi_n \begin{bmatrix}\lambda^{n-1} & \lambda^{n-2} & \dots & \lambda & 1\end{bmatrix}^T$ para algún $\varphi_n \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Utilizando la notación del lema anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1} &= \varphi_n\lambda, \\ \varphi_{n-2} &= \varphi_{n-1}\lambda = \varphi_n\lambda^2, \\ &\dots \\ \varphi_1 &= \varphi_2\lambda = \varphi_n\lambda^{n-1}. \end{aligned} \qquad \square$$

Cuando $\varphi_n = 1$ diremos que $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un *autovector privilegiado*. El siguiente resultado establece la existencia de autovectores privilegiados y se deduce de la Proposición 22 y del Lema 24.

PROPOSICIÓN 25. *Si $\vec{v}$ es un autovector asociado al autovalor λ y $\varphi_n \neq 0$ es su última coordenada, entonces $\vec{v}\varphi_n^{-1}$ es un autovector privilegiado, correspondiente al autovalor $\varphi_n\lambda\varphi_n^{-1}$.*

Enunciamos ahora el resultado principal de esta Sección.

Teorema 26. *Sea $\vec{v} \neq \vec{0}$ un autovector de M correspondiente al autovalor λ. Entonces el cuaternio*

$$\lambda' = \varphi_{n-1}\varphi_n^{-1} = \varphi_n \lambda \varphi_n^{-1}$$

es raíz del polinomio (13).

Demostración. Utilizando de nuevo la notación del Lema 24 y sustituyendo en la primera ecuación de (14) llegamos a que

$$a_{n-1}\varphi_n\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\varphi_n\lambda + a_0\varphi_n = \varphi_n\lambda^n,$$

y multiplicando toda la expresión por φ_n^{-1}, tenemos

$$a_{n-1}\varphi_n\lambda^{n-1}\varphi_n^{-1} + \cdots + a_1\varphi_n\lambda\varphi_n^{-1} + a_0 = \varphi_n\lambda^n\varphi_n^{-1},$$

es decir,

$$a_{n-1}(\varphi_n\lambda\varphi_n^{-1})^{n-1} + \cdots + a_1(\varphi_n\lambda\varphi_n^{-1}) + a_0 = (\varphi_n\lambda\varphi_n^{-1})^n.$$

Así, $\lambda' = \varphi_{n-1}\varphi_n^{-1}$ es raíz del polinomio. □

En resumen, si encontramos un autovalor cuaterniónico λ de la matriz compañera M y un autovector $\vec{v}$ asociado, tendremos una raíz $\varphi_n\lambda\varphi_n^{-1}$ usando la última coordenada de $\vec{v}$. Los autovalores similares a λ nos dan la misma raíz. Además, uno de ellos nos dará el autovector privilegiado.

Por otro lado, todas las raíces del polinomio son de este tipo. En efecto, la ecuación $a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_1\xi + a_0 = \xi^n$ se puede reescribir como

$$M \begin{bmatrix} \xi^{n-1} \\ \xi^{n-2} \\ \cdots \\ \xi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^{n-1} \\ \xi^{n-2} \\ \cdots \\ \xi \\ 1 \end{bmatrix} \xi,$$

y tenemos que $\lambda = \xi$ es un autovalor de M de la forma buscada.

6.2. Cálculo de los autovalores y autovectores de la matriz M

En lugar de tratar de definir un polinomio característico para calcular los autovalores de la matriz compañera M, lo que haremos será pasar M a su forma compleja. Así, si $M \in \mathbb{H}^{n\times n}$ se escribe como $Z + \mathbf{j}W$, donde $Z, W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices complejas, entonces la representaremos como una matriz compleja de orden $2n$, de la siguiente manera:

$$f(M) = \begin{bmatrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}.$$

TEOREMA 27. *Un complejo $z \in \mathbb{C}$ es autovalor de $f(M)$, con autovector $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, $A, B \in \mathbb{C}^n$, si y sólo si z es autovalor complejo de M con autovector $A + \mathbf{j}B$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$f(M) \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} z,$$

es decir,

$$ZA - \overline{W}B = Az, \quad WA + \overline{Z}B = Bz. \tag{15}$$

Estas dos ecuaciones son equivalentes a

$$(Z + \mathbf{j}W)(A + \mathbf{j}B) = (A + \mathbf{j}B)z,$$

que es la condición buscada. Nótese que $z\mathbf{j} = \mathbf{j}\overline{z}$, para cualquier complejo z. □

PROPOSICIÓN 28. *Si z es autovalor de la matriz $f(M)$, entonces $\overline{z}$ también lo será.*

DEMOSTRACIÓN. Volvamos a las ecuaciones dadas en (15) y tomemos conjugados. Tendremos

$$\overline{ZA} - W\overline{B} = \overline{A}\overline{z}, \quad \overline{WA} + Z\overline{B} = \overline{B}\overline{z},$$

que es equivalente a la condición $f(M) \begin{bmatrix} \overline{B} \\ -\overline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{B} \\ -\overline{A} \end{bmatrix} \overline{z}$. □

De esta forma, a partir de los autovalores de $f(M)$ tendremos calculados todos los autovalores complejos de M, y, en consecuencia, tendremos todos los autovalores de M, porque todo cuaternio es similar a dos números complejos (Corolario 4) y por lo demostrado en la Proposición 22.

EJEMPLO 29. Resolver la ecuación $\xi^2 + \mathbf{j}\xi + (1 - \mathbf{k}) = 0$.

Tenemos que $a_1 = -\mathbf{j}$ y $a_0 = -(1 - \mathbf{k}) = \mathbf{k} - 1$. La matriz compañera es

$$M = \begin{bmatrix} -\mathbf{j} & \mathbf{k} - 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que se descompone en la forma $Z + \mathbf{j}W$ como

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{j} \begin{bmatrix} -1 & -\mathbf{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la matriz compleja asociada a M será

$$f(M) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & | & 1 & -\mathbf{i} \\ 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ -1 & -\mathbf{i} & | & 0 & -1 \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculamos los autovalores de $f(M)$ con el polinomio característico $\det(f(M)-zI) = z^4 + 3z^2 + 2$, cuyas raíces son

$$z_1 = \mathbf{i},\ \overline{z_1} = -\mathbf{i},\ z_2 = \sqrt{2}\,\mathbf{i},\ \overline{z_2} = -\sqrt{2}\,\mathbf{i}.$$

El cálculo de los autovectores se reduce a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en los complejos. Nos dará los siguientes resultados:

- para el autovalor $z_1 = \mathbf{i}$, el espacio de autovectores está generado por $(0, 0, \mathbf{i}, 1)$;
- para $z_2 = \sqrt{2}\,\mathbf{i}$, está generado por $(2-\sqrt{2}, \mathbf{i}-\sqrt{2}\,\mathbf{i}, \sqrt{2}\,\mathbf{i}, 1)$.

Por el Teorema 27, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ también son autovalores de la matriz M y sus autovectores asociados serán respectivamente:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{j} \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \\ \mathbf{j} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2}-\sqrt{2}k \\ (1-\sqrt{2})\mathbf{i}+\mathbf{j} \end{bmatrix}.$$

Ahora, si λ es un autovalor cualquiera de M, sabemos que λ es similar a un complejo (Corolario 4). Por lo visto después del Teorema 26, basta buscar raíces usando los autovalores z_1 y z_2 (no hacen falta $\overline{z_1}$ ni $\overline{z_2}$, porque son similares a z_1 y z_2, respectivamente). Se trataría de buscar, de entre los autovectores asociados, cuáles son privilegiados, para luego hallar la raíz correspondiente. Por tanto:

- Para $z_1 = \mathbf{i}$, sabemos que los cuaternios unitarios puros son autovalores de M, pues son similares a z_1 (Teorema 3). Además, por la Proposición 22, sabemos que
$$v_1\mathbf{j}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k} \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} (-\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{i} \\ 1 \end{bmatrix}$$
es un autovector privilegiado; y por el Teorema 26, tendremos que
$$\varphi_{n-1}\varphi_n^{-1} = (-\mathbf{i})(1) = -\mathbf{i}$$
es solución de la ecuación.
- Análogamente se procedería con $z_2 = \sqrt{2}\mathbf{i}$. En este caso
$$\varphi_{n-1}\varphi_n^{-1} = (2-\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathbf{k})(\mathbf{i}-\sqrt{2}\mathbf{i}+\mathbf{j})^{-1} = -(\mathbf{i}+\mathbf{j})$$
es la otra solución de la ecuación, que además no tiene más soluciones.

6.3. Comparación de resultados

Ya que acabamos de resolver una ecuación de grado 2, podemos comparar los resultados obtenidos de esta forma con los dados por el método de Huang y So, que hemos visto en el apartado 4 de este trabajo. Así, para la ecuación anterior, tenemos que $b = \mathbf{j}$ y $c = 1-\mathbf{k}$. Como $\Re(b) = 0$, nos encontramos en el caso estudiado en la Subsección 4.3. Haciendo los cambios de variable de (8),

$$B = |\mathbf{j}|^2 + 2\cdot 1 = 3, \quad E = |1-\mathbf{k}|^2 = 2, \quad D = \bar{\mathbf{j}}(1-\mathbf{k}) + (\overline{1-\mathbf{k}})\mathbf{j} = 0,$$

se tiene que $B^2 - 4E = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$. Por tanto, por la Proposición 14, las soluciones del sistema para el cálculo de T y N serán $T = 0$ y $N_1 = 1$, $N_2 = 2$. Teniendo en cuenta (fórmula (6)) que $\xi = -(b+T)^{-1}(c-N)$, llegamos a que las soluciones son

- $\xi_1 = -(\mathbf{j}+0)^{-1}\,((1-\mathbf{k})-1) = -\mathbf{i}$,
- $\xi_2 = -(\mathbf{j}+0)^{-1}\,((1-\mathbf{k})-2) = -\mathbf{i}-\mathbf{j} = -(\mathbf{i}+\mathbf{j})$,

que coinciden con las encontradas con el método de los autovalores. Una comparación sistemática de ambos métodos puede verse en el trabajo de Macías y Pereira [10].

7. Teorema Fundamental del Álgebra

El "teorema fundamental del álgebra" (TFA) establece que todo polinomio complejo no constante tiene tantos ceros como el valor de su grado. Dada la rica estrutura de los cuaternios, podemos tratar el siguiente problema: ¿cuándo tiene un polinomio cuaterniónico algún cero en $\mathbb{H}$? La respuesta va a ser que no siempre, pero podemos dar hipótesis suficientes sobre el polinomio para que así sea. Seguiremos la prueba hecha por Eilenberg y Niven en 1943 [3] que se basa en la teoría del grado topológico. Esta prueba también puede ser extendida a los octonios [4, Teorema 5.7].

Ejemplo 30. El polinomio $p(\xi) = \xi\mathbf{i} - \mathbf{i}\xi$ se anula en el plano $\langle 1, \mathbf{i}\rangle$. Por tanto tiene infinitas raíces. Una sencilla comprobación nos lleva a que el conjunto de valores $p(\mathbb{H})$ es el plano $\langle \mathbf{j}, \mathbf{k}\rangle$, con lo que el polinomio $q(\xi) = \xi\mathbf{i} - \mathbf{i}\xi + 1$ no tiene ningún cero en $\mathbb{H}$. Este ejemplo lleva a pensar que los polinomios con varios términos de grado máximo (un fenómeno permitido por la no conmutatividad) pueden dar problemas para que se verifique el TFA.

Para utilizar la teoría del grado topológico vamos a trabajar sobre la esfera $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{R}^5$. Para eso compactificaremos $\mathbb{H}$ añadiendo un punto del infinito. Probaremos que todo polinomio cuaterniónico $p(\xi)$ que tenga un único término de grado máximo $n > 0$ verifica que $\lim |p(q)| = \infty$ cuando $|q| \to \infty$. Esto permite extender de modo continuo el polinomio $p\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ a una aplicación de la esfera $S^4 \cong \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ en sí misma, haciendo $p(\infty) = \infty$.

7.1. Teoría del grado

Una explicación, incluso introductoria, de la teoría del grado topológico excedería ampliamente el objetivo de este artículo, por lo que recomendamos consultar algún libro como [14]. La resumiremos diciendo que para cualquier variedad topológica M de dimensión m puede definirse el m-ésimo *grupo de homología $H_m(M)$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$*, que es un grupo abeliano, y para cada aplicación continua $f\colon M \to M$ existe un morfismo inducido en homología $f_*\colon H_m(M) \to H_m(M)$, que es un morfismo de grupos. Cuando la variedad es compacta, conexa y orientada resulta que $H_m(M)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, y por tanto f_* es de la forma $f_*(\omega) = \lambda\omega$, para algún entero λ. Este número entero se llama el *grado* global de la aplicación f y se denota por $\deg(f)$ [15].

Como dos aplicaciones homótopas inducen el mismo morfismo en homología, se sigue que tienen el mismo grado. Una consecuencia importante es que una aplicación con grado no nulo es sobreyectiva. Aunque este resultado es cierto en el caso general, lo probaremos únicamente para las esferas.

Proposición 31. *Si $f\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ es una aplicación continua con $\deg(f) \neq 0$, entonces f es sobreyectiva.*

Demostración. Si f no fuese sobreyectiva existiría un punto p del codominio que no estaría en la imagen de f. Como $\mathbb{S}^m \setminus \{p\}$ es contráctil podemos encontrar una homotopía de f a una aplicación constante c. Como el grado es invariante por homotopía de aplicaciones y $\deg c = 0$, tenemos $\deg f = 0$. □

7.2. Teoría del grado local

Necesitamos desarrollar técnicas analíticas que faciliten el cálculo del grado, para lo que utilizaremos un enfoque local. En el caso en que la aplicación sea diferenciable y su dominio sea una variedad diferenciable compacta es posible caracterizar el grado de un modo eficaz. Como referencias para esta parte citaremos [1] y [11].

Sea $p \in M$ un valor regular para una aplicación diferenciable $f\colon M \to M$, con M compacta. Entonces $f^{-1}(p) = \{q_1, ..., q_k\}$ es un conjunto finito. Además, por el teorema de la función inversa, existen entornos abiertos disjuntos $V_i \subset M$ de cada q_i, y un entorno $U \subset M$ de p tal que $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^k V_i$ y cada restricción $f_{|V_i}$ es un difeomorfismo $V_i \cong U$. Supongamos además que la variedad M es conexa y orientada. Entonces podemos definir el *índice local* en una preimagen $q \in f^{-1}(p)$ de un valor regular $p \in M$ como el signo del jacobiano:

$$\mathrm{Ind}(f; q) = \mathrm{signo}(\det(D_q f)).$$

Teorema 32. *En la situación anterior, para cualquier valor regular $p \in M$ tenemos*

$$\deg(f) = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \mathrm{Ind}(f; q).$$

Vamos a hacer un cálculo explícito.

Teorema 33. *La aplicación potencia n-ésima $g(\xi) = \xi^n$ tiene grado n.*

Demostración. Las soluciones de $g(\xi) = \mathbf{i}$ son precisamente las raíces n-ésimas de $\mathbf{i}$, de las cuales, como vimos en el Teorema 17, hay precisamente n (que por tanto deben ser las n raíces complejas). Para calcular el grado de la aplicación vamos a apoyarnos en el Teorema 32. Veremos que en este caso el jacobiano en las raíces es siempre positivo, con lo que g tendrá grado n.

Antes de nada debemos probar que la extensión $\hat{g}$ de $g(\xi) = \xi^n$ es diferenciable en el punto del infinito. Sea $\mathbb{S}^4 = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ y sea $\gamma\colon \mathbb{S}^4 \to \mathbb{S}^4$ el difeomorfismo $\gamma(\xi) = \xi^{-1}$, donde $\gamma(0) = \infty$ y $\gamma(\infty) = 0$. Si consideramos el difeomorfismo $\mathbb{S}^4 \setminus \{0\} \cong \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ dado por la proyección estereográfica, la composición con γ resulta una carta C^∞

de la esfera en un entorno del infinito, con lo que para estudiar la diferenciabilidad de g en ∞ bastará estudiar la diferenciabilidad en el cero de la aplicación

$$G\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad G(\xi) = \frac{1}{g(1/\xi)} \quad \text{y} \quad G(0) = 0.$$

Si $n = 1$ el resultado es evidente, pues $\hat{g}$ es la identidad. Para $n \geq 2$, tomando $\varepsilon \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ tenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|G(\varepsilon) - G(0)|}{|\varepsilon|} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\varepsilon|^{-1}}{|g(1/\varepsilon)|} = \lim_{\varepsilon\to 0} |\varepsilon^{n-1}| = 0.$$

Con esto queda probado que $\hat{g}$ es diferenciable. Vamos a calcular cada columna de la matriz jacobiana (como aplicación diferenciable de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$) como el límite del cociente incremental correspondiente.

Para los cálculos siguientes consideramos $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea $t + x\mathbf{i}$ una raíz n-ésima de $\mathbf{i}$, con lo que $x \neq 0$ y $(t + x\mathbf{i})^{n-1} = \mathbf{i}/(t + x\mathbf{i})$. Además su norma cumple $t^2 + x^2 = 1$, con lo que $(t + x\mathbf{i})(t - x\mathbf{i}) = 1$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x_1} &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{(t + x\mathbf{i} + \lambda)^n - (t + x\mathbf{i})^n}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} \frac{(t + x\mathbf{i})^{n-m}\lambda^m}{\lambda} \\ &= n\frac{\mathbf{i}}{t + x\mathbf{i}} = n(t - x\mathbf{i})\mathbf{i} = nx + nt\mathbf{i}.\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{(t + x\mathbf{i} + \lambda\mathbf{i})^n - (t + x\mathbf{i})^n}{\lambda} = -nt + nx\mathbf{i}.$$

Por otro lado (debemos tener cuidado porque la fórmula del binomio no es válida en el caso no conmutativo):

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x_3} &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{(t + x\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j})^n - (t + x\mathbf{i})^n}{\lambda} \\ &= \mathbf{j}\sum_{m=1}^{n} (t - x\mathbf{i})^{n-m}(t + x\mathbf{i})^{m-1} \\ &= \mathbf{j}\frac{(t + x\mathbf{i})^n - (t - x\mathbf{i})^n}{(t + x\mathbf{i}) - (t - x\mathbf{i})} = \mathbf{j}\frac{2\mathbf{i}}{2x\mathbf{i}} = \frac{1}{x}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

donde hemos usado que $(t+x\mathbf{i})\mathbf{j} = \mathbf{j}(t-x\mathbf{i})$ y que $(t+x\mathbf{i})^n = \mathbf{i}$, con lo que $(t-x\mathbf{i})^n = -\mathbf{i}$, además de la fórmula de la progresión geométrica.

Por último:

$$\frac{\partial g}{\partial x_4} = \frac{1}{x}\mathbf{k}.$$

Por tanto en cada raíz n-ésima $t+x\mathbf{i}$ de $\mathbf{i}$ el jacobiano de g vale (ver [3, p. 248]):

$$\det \begin{bmatrix} nx & -nt & 0 & 0 \\ nt & nx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/x \end{bmatrix} = \left(\frac{n}{x}\right)^2 > 0. \quad \square$$

7.3. Demostración del TFA

Teorema 34 (TFA en $\mathbb{H}$ [3]). *Todo polinomio cuaterniónico no constante que posea un único término de grado máximo tiene por lo menos un cero en $\mathbb{H}$.*

Para la demostración utilizaremos la teoría del grado topológico, al ser $\mathbb{S}^4$ una variedad compacta, conexa y orientable. Para los polinomios cuaterniónicos cuya extensión resulte continua construiremos una homotopía con el polinomio $g(\xi) = \xi^n$, cuyo grado topológico hemos comprobado que es n. En consecuencia, por la invariancia por homotopía, todo polinomio con un único término de grado máximo tiene grado topológico no nulo, con lo que ese polinomio va a ser sobreyectivo (Proposición 31) y va a alcanzar el valor cero. Por tanto tendrá al menos una raíz.

Proposición 35. *Sea $p(\xi) \in \mathbb{H}[\xi]$ un polinomio con un único término de grado máximo, es decir,*

$$p(\xi) = q_0\xi q_1\xi \cdots q_{n-1}\xi q_n + \psi(\xi)$$

donde $q_r \in \mathbb{H}\setminus\{0\}$, $r \in \{0, 1, ..., n\}$, y $\psi(\xi)$ tiene grado inferior a r, es decir es una suma finita de monomios del tipo $q_0'\xi q_1'\xi ... q_{l-1}'\xi q_l'$ donde $l < r$. Entonces $p(\xi)$ se puede extender al infinito.

Demostración. Denotando

$$\psi(\xi) = \psi_1(\xi) + \cdots + \psi_m(\xi),$$

donde cada sumando es un monomio, sabemos por la desigualdad triangular que

$$|p(\xi)| \geq |q_0\xi q_1\xi ... q_{n-1}\xi q_n| - |\psi(\xi)|$$

y, por lo tanto,

$$|p(\xi)| \geq |q_0\xi q_1\xi ... q_{n-1}\xi q_n| - (|\psi_1(\xi)| + \cdots + |\psi_m(\xi)|).$$

Usando las propiedades de la norma con respecto al producto, dividiendo por $|\xi^{n-1}|$ y tomando límites con $|\xi| \to \infty$ resulta

$$\text{lím} \frac{|p(\xi)|}{|\xi^{n-1}|} \geq \text{lím}\, |\xi||q_0| \cdots |q_n| - c = \infty.$$

Entonces concluimos que $\text{lím}\, |p(\xi)|/|\xi^{n-1}| = \infty$ y por tanto $\text{lím}\, |p(\xi)| = \infty$, como queríamos demostrar. $\square$

El siguiente paso va a ser considerar el polinomio de grado n dado por $g(\xi) = \xi^n$. Denotaremos las extensiones de p y g como $\hat{p}$ y $\hat{g}$, respectivamente.

Proposición 36. *La extensión $\hat{p}$ de un polinomio $p(\xi)$ en las condiciones de la Proposición 35 es homótopa a la extensión $\hat{g}$ del polinomio $g(\xi) = \xi^n$, como aplicaciones continuas de $\mathbb{S}^4$ en $\mathbb{S}^4$.*

Demostración. Definamos primero una homotopía entre $\hat{p}(\xi)$ y la extensión del término de mayor grado $\Delta(\xi) = q_0\xi q_1\xi ... q_{n-1}\xi q_n$ como sigue:

$$F\colon \mathbb{S}^4 \times [0,1] \to \mathbb{S}^4, \quad F(\xi, t) = \Delta(\xi) + (1-t)\psi(\xi), \quad F((\infty, t)) = \infty.$$

Resulta que F es continua. Nótese que esto debe comprobarse también en los puntos (∞, t), para lo que es necesario identificar $\mathbb{S}^4$ con $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$, por ejemplo por medio de la proyección estereográfica. Además $F(\xi, 0) = p(\xi)$ y $F(\xi, 1) = \Delta(\xi)$.

Finalmente, realizamos una nueva homotopía, esta vez entre $\hat{\Delta}$ y $\hat{g}$. Para ello, consideremos caminos σ_i, $i \in \{0, 1, ..., n\}$, en $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ de modo que $\sigma_i(0) = q_i$ y $\sigma_i(1) = 1$. Definimos

$$G\colon \mathbb{S}^4 \times [0,1] \to \mathbb{S}^4, \quad G(\xi, t) = \sigma_0(t)\xi\sigma_1(t)\xi \cdots \sigma_n(t)\xi, \quad G((\infty, t)) = \infty.$$

De nuevo comprobamos la continuidad y que $G(\xi, 0) = \Delta(\xi)$ y $G(\xi, 1) = \xi^n$. $\square$

Con ello hemos probado el Teorema 34.

7.4. Una generalización

El objetivo de esta sección es generalizar el resultado anterior, dando una condición más laxa que la de Eilenberg-Niven pero que garantice también que $\lim |p(\xi)| = \infty$ cuando $|\xi| \to \infty$.

Definición 37. Diremos que un polinomio cuaterniónico $p(\xi) \in \mathbb{H}[\xi]$ tiene un monomio dominante si su término de mayor grado puede escribirse como una suma de monomios

$$\Delta(\xi) = \Delta_0(\xi) + \Delta_1(\xi) + \cdots + \Delta_s(\xi), \tag{16}$$

donde uno de ellos verifica que

$$|\Delta_0(\xi)| > |\Delta_1(\xi)| + \cdots + |\Delta_s(\xi)|$$

para $\xi \neq 0$.

Teorema 38. *Si $p(\xi)$ es un polinomio cuaterniónico con un monomio dominante, entonces p tiene por lo menos un cero en $\mathbb{H}$.*

Demostración. En primer lugar comprobamos que el polinomio se puede extender a la esfera. Manteniendo la notación de (16), si

$$\Delta_i(\xi) = a_{i,0}\xi a_{i,1}\xi \cdots \xi a_{i,n},$$

la hipótesis nos dice que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|a_{0,0}a_{0,1}\cdots a_{0,n}| > \sum_{i=1}^{s} |a_{i,0}a_{i,1}\cdots a_{i,n}| + \varepsilon,$$

con lo que

$$|\Delta(\xi)| \geq |\Delta_0(\xi)| - \sum_{i=1}^{s} |\Delta_i(\xi)| > |\xi|^n \varepsilon$$

y ya se tiene que $|\Delta(\xi)| \to \infty$ cuando $\xi \to \infty$. □

El resto de la demostración del TFA, a través de una homotopía con $g(\xi) = \xi^n$ es completamente análoga a la del Teorema 34.

Ejemplo 39. El Teorema 38 permite afirmar que el polinomio

$$p(\xi) = 4\xi\mathbf{i}\xi\mathbf{j} - 2\xi\mathbf{j}\xi\mathbf{k} + \xi\mathbf{k}\xi\mathbf{i} + (\mathbf{i}+\mathbf{j})\xi + \xi\mathbf{k} + 7$$

tiene ceros en $\mathbb{H}$. Nótese que no se puede aplicar el Teorema 34.

Ejemplo 40. El polinomio $\xi\mathbf{i} - \mathbf{i}\xi + 1$ del Ejemplo 30 no tiene raíces, lo que muestra que la desigualdad en la Definición 37 tiene que ser estricta.

Referencias

[1] Deimling, K. *Nonlinear functional analysis.* Springer, Berlin, 1985.

[2] De Leo, S.; Ducati, G.; Leonardi V. Zeros of unilateral quaternionic polynomials. *Electron. J. Linear Algebra*, Vol. 15 (2006), 297–313 .

[3] Eilenberg, S.; Niven, I. The “fundamental theorem of algebra” for quaternions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 50 (1944), 246–248.

[4] Eilenberg, S.; Steenrod, N. *Foundations of algebraic topology.* Princeton Mathematical Series No.15. Princeton: University Press (1952).

[5] Girard, P.R. The quaternion group and modern physics, *Eur. J. Phys.* Vol 5 (1984), 25–32.

[6] Hanson, A.J. *Visualizing quaternions.* The Morgan Kaufmann Series in Interactive 3D Technology, Elsevier, 2006.

[7] Huang, L.; So, W. Quadratic formulas for quaternions. *Appl. Math. Lett.* 15 (2002), 533–540.

[8] Janovská, D.; Opfer, G. Linear equations in quaternionic variables. *Mitt. Math. Ges. Hamb.* 27 (2008), 223–224.

[9] Macías Virgós, E.; Pereira Sáez M. J. A topological approach to left eigenvalues of quaternionic matrices. *Linear Multilinear Algebra*, Vol. 62(2) (2014), 139–158.

[10] Macias-Virgós, E.; Pereira-Sáez, M. J. Left eigenvalues of 2×2 symplectic matrices, *Electron. J. Linear Algebra* 18(2009), 274–280.

[11] Madsen, I.; Tornehave, J. *From Calculus to Cohomology.* Cambridge (1997).

[12] Mukundan, R. Quaternions: from classical mechanics to computer graphics, and beyond. *Proc.* 7^{th} *Asian Technology Conference in Mathematics*, 2002.

[13] Niven, I. The roots of a quaternion. *Amer. Math. Monthly*, Vol. 49 (1942), 386–388.

[14] Outerelo, E.; Ruiz, J.M. *Mapping Degree Theory.* Graduate Studies in Mathematics Vol. 108, AMS-RSME, 2009.

[15] Prasolov, V.V. *Elements of Homology Theory*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 81, AMS, 2007.

[16] Stillwell, J. *Elements of Number Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.

[17] Au-Yeung, Y.H. An explicit solution for the quaternionic equation $x^2+bx+xc+d=0$. *Southeast Asian Bull. Math.* 26 (2002), 717–724.

[18] Zhang, F. Quaternions and matrices of quaternions. *Linear Algebra Appl.* 251 (1997), 21–57.

DANIEL CAO LABORA, ENRIQUE MACÍAS VIRGÓS, MIGUEL A. REGUEIRO TORRES,
FACULTADE DE MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
Correo electrónico: quique.macias@usc.es