

MIGUEL DOMÍNGUEZ VÁZQUEZ

**HIPERSUPERFICIES CON  
CURVATURAS PRINCIPAIS  
CONSTANTES NOS ESPAZOS  
PROXECTIVO E HIPERBÓLICO  
COMPLEXOS**

**118**  
**2010**

Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



MIGUEL DOMÍNGUEZ VÁZQUEZ

**HIPERSUPERFICIES CON  
CURVATURAS PRINCIPAIS  
CONSTANTES NOS ESPAZOS  
PROXECTIVO E HIPERBÓLICO  
COMPLEXOS**

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección dos profesores José Carlos Díaz Ramos e Eduardo García Río, para obter o Diploma de Estudos Avanzados en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levou a cabo a súa defensa o día 15 de xullo de 2010 na Facultade de Matemáticas de dita Universidade, obtendo a cualificación de Sobresaliente.

**IMPRIME:** Imprenta Universitaria  
Pavillón de Servizos  
Campus Universitario  
15782 Santiago de Compostela

**ISBN:** 978-84-89390-35-5

**Dep. Leg.:** C 3258-2010

*Á miña familia.*



# Agradecementos

Ó pensar en escribir nesta páxina doume conta da cantidade de persoas ás que lle debo, en maior ou menor medida, que esta memoria vexa a luz; persoas que me gustaría que se sentisen parte deste traballo, aínda que non vexan o seu nome nestas liñas. Espero que a miña actitude de cada día sexa suficiente para manifestar esta gratitude.

Quérolle agradecer en primeiro lugar a José Carlos Díaz Ramos, o director deste traballo, todo o tempo que me dedicou neste último ano e medio, todo o que aprendín del, o ben que me soubo aconsellar en tantos momentos e, en especial, o devolverme a ilusión polas Matemáticas. Quero tamén estender este agradecemento a Eduardo García Río, por estar sempre dispoñible, polos seus bos consellos e por axudarme a financiar os meus estudos de doutoramento. A ambos débolles a posibilidade que me brindan continuamente de seguir formándome e de coñecer xente do mundo das Matemáticas e, sobre todo, débolles o inmejorable ambiente no que cada día podó levar adiante o meu traballo.

Quérolle dar as grazas tamén ó profesor José Antonio Oubiña Galiñanes, polos seus comentarios tan lúcidos e interesantes sobre algúns aspectos desta memoria.

Ós meus compañeiros e amigos de despacho: Sandra, Coté, Javi, Miguel e Esteban, moitas grazas por compartirmos día a día as dificultades e alegrías das nosas vidas como doutorandos e polo aprezo que me demostrades. Moitas grazas a Xosé Antonio, a Iván Alén e a Hugo, por esas conversas tan brillantemente orixinais sobre a nosa visión da ciencia e da vida. Moitas grazas a todos os meus amigos de Bacharelato e ós profesores de todos os niveis educativos que deixaron a súa pegada en min.

Finalmente, quérolle dar as grazas de forma moi especial á miña familia: ós meus pais Camilo Modesto e Maricarmen e á miña irmá Iria. A eles débolles a educación que recibín, a súa infinita confianza en min, os mellores ánimos e orientacións e o poder contar con eles sempre. Por isto e por moito máis, dedícolles este traballo.





# Abstract

A homogeneous submanifold of a Riemannian manifold is an orbit of the action of a closed subgroup of the isometry group of the ambient manifold. Of particular interest are homogeneous hypersurfaces, which arise as principal orbits of cohomogeneity one actions. An important problem in submanifold geometry is to classify homogeneous submanifolds of a given Riemannian manifold and to characterize them in terms of geometric data. A hypersurface has constant principal curvatures if the eigenvalues of its shape operator are constant. Obviously, homogeneous hypersurfaces have constant principal curvatures. It is still an outstanding open problem to determine under which circumstances hypersurfaces with constant principal curvatures of a Riemannian manifold are open parts of homogeneous ones.

In spaces of constant curvature, a hypersurface with constant principal curvatures is said to be isoparametric. Segre [40] and Cartan [13] classified isoparametric hypersurfaces in Euclidean and real hyperbolic spaces, respectively. A consequence of these results is that they all are open parts of homogeneous hypersurfaces. This problem, however, is more involved in spheres. Let  $g$  denote the number of principal curvatures of a hypersurface with constant principal curvatures in a sphere. Cartan classified hypersurfaces with  $g \in \{1, 2, 3\}$  constant principal curvatures in spheres, but failed to solve the problem in general. In the seventies, Hsiang and Lawson [24] classified cohomogeneity one actions in spheres, and Münzner [33] showed that  $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  for isoparametric hypersurfaces in general. Surprisingly, for  $g = 4$  there are hypersurfaces with constant principal curvatures that are not homogeneous [19]. Recently, Cecil, Chi and Jensen [14] and Immervoll [25] showed that, with a few possible exceptions, hypersurfaces with  $g = 4$  constant principal curvatures are among the known homogeneous and inhomogeneous examples. Some progress has been made for  $g = 6$ , but the problem remains still open.

In complex space forms the situation is also involved. As before, let  $g$  be the number of principal curvatures of a real hypersurface with constant principal curvatures in a complex space form of constant holomorphic sectional curvature  $c \neq 0$ ; thus, if  $c > 0$  we have a complex projective space  $\mathbb{C}P^n$  and if  $c < 0$  we have a complex hyperbolic space  $\mathbb{C}H^n$ . Let  $M$  be a real hypersurface of a complex space form and  $\xi$  a (local) unit normal vector field. If  $J$  denotes the Kähler structure of the complex space form, then  $J\xi$  is tangent to  $M$  and is called the Hopf vector field of  $M$ . We say that  $M$  is Hopf if  $J\xi$  is a principal curvature vector field. For each  $p \in M$  let  $h(p)$  be the number of nontrivial projections of  $J\xi_p$  onto the principal curvature spaces of  $M$ . This function  $h$  is integer-valued and, obviously,  $M$  is Hopf if and only if  $h = 1$ .

The classification of homogeneous real hypersurfaces in the complex projective space was derived by Takagi [42]. It follows from this classification that  $g \in \{2, 3, 5\}$ . A remarkable feature of homogeneous real hypersurfaces in  $\mathbb{C}P^n$  is that they are Hopf. Subsequently, Takagi classified real hypersurfaces with  $g \in \{2, 3\}$  constant principal curvatures in [43] and [44], with the exception of the case  $n = 2$ ,  $g = 3$ , which was solved by Wang [47]. All examples classified in these results are Hopf and open parts of homogeneous ones. Kimura [26] classified Hopf real hypersurfaces with constant principal curvatures in  $\mathbb{C}P^n$  and showed that these are open parts of homogeneous ones. No examples are known of real hypersurfaces with constant principal curvatures in  $\mathbb{C}P^n$  with  $h > 1$ .

The situation is more interesting in the complex hyperbolic space  $\mathbb{C}H^n$ , where, surprisingly, there are non-Hopf homogeneous real hypersurfaces. Such real hypersurfaces were constructed by Berndt and Brück [5], [6]. Indeed, with  $h = 3$  there are uncountably many non-congruent homogeneous real hypersurfaces with  $g \in \{4, 5\}$ . Berndt and Tamaru obtained in [11] the classification of cohomogeneity one actions on  $\mathbb{C}H^n$ . The number of principal curvatures of the resulting homogeneous hypersurfaces is  $g \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Montiel [32] classified real hypersurfaces with  $g = 2$  constant principal curvatures in  $\mathbb{C}H^n$  ( $n \geq 3$ ). Berndt and Díaz Ramos solved the cases  $g = 3$ , and  $g = 2$ ,  $n = 2$  in [8] and [9]. It follows from these results that  $h = 1$  when  $g = 2$  and that  $h \leq 2$  if  $g = 3$ . Hopf real hypersurfaces with constant principal curvatures in  $\mathbb{C}H^n$  were classified by Berndt [4] and they all are open parts of homogeneous ones. To our knowledge, the first classifications of this kind involving non-Hopf real hypersurfaces are [8] and [9]. Nothing is known about  $h$  if  $g \geq 4$ .

The aim of the original part of this work is to carry out the next natural step after Berndt and Kimura's classification of Hopf real hypersurfaces with constant principal curvatures in  $\mathbb{C}P^n$  and  $\mathbb{C}H^n$  [4], [26]. Thus, we classify real hypersurfaces with constant principal curvatures and  $h = 2$  nontrivial projections of the Hopf vector field onto the principal curvature spaces in complex space forms.

**Main Theorem.** *We have:*

- (a) *There are no hypersurfaces with constant principal curvatures in  $\mathbb{C}P^n$ ,  $n \geq 2$ , for which the number of nontrivial projections of the Hopf vector field onto the principal curvature spaces is  $h = 2$ .*
- (b) *Let  $M$  be a real hypersurface with constant principal curvatures in  $\mathbb{C}H^n$ ,  $n \geq 2$ , such that the number of nontrivial projections of the Hopf vector field onto the principal curvature spaces of  $M$  is  $h = 2$ . Then,  $M$  has  $g \in \{3, 4\}$  principal curvatures and is holomorphically congruent to an open part of:
  - (i) *a ruled minimal real hypersurface  $W^{2n-1} \subset \mathbb{C}H^n$  or one of the equidistant hypersurfaces to  $W^{2n-1}$  or,*
  - (ii) *a tube around a ruled minimal submanifold  $W^{2n-k} \subset \mathbb{C}H^n$  for some  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ .**

*In particular,  $M$  is an open part of a homogeneous real hypersurface of  $\mathbb{C}H^n$ .*

The ruled minimal submanifolds  $W^{2n-k} \subset \mathbb{C}H^n$  are homogeneous and have totally real normal bundle of rank  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . The hypersurface  $W^{2n-1}$  was constructed by Lohnherr [30], while Berndt and Brück generalized this construction to higher codimensions [6]. See Chapter 2 (Section 2.3) or [10] for a detailed description of these examples.

The aim of this work is to get a better understanding of the relation between homogeneous hypersurfaces and hypersurfaces with constant principal curvatures in complex space forms. In order to do that, we develop the necessary material to, firstly, present this problem in its appropriate context and, secondly, to understand our original contribution to this area of submanifold theory.

This work is structured as follows.

In Chapter 1 we present the terminology and notation that we will use in the rest of the work. In Section 1.1 we introduce the basics of submanifold theory, in special the standard theory of Jacobi vector fields. In Section 1.2 we present some notation that we will use in relation to matrices, Lie groups and Lie algebras. In Section 1.3 we expose a detailed construction of complex projective and hyperbolic spaces as spaces with constant holomorphic sectional curvature, and we analyse their structure of symmetric space.

In order to understand the construction and properties of the submanifolds appearing in the Main Theorem, in Chapter 2 we get a deeper description of the complex hyperbolic space as a symmetric space of noncompact type, what will lead us to a model of  $\mathbb{C}H^n$  as a solvable Lie group (Section 2.1). In Section 2.2 we geometrically interpret this model to describe in Section 2.3 the hypersurfaces which will appear in our classification theorem.

In Chapter 3 we try to motivate the study of homogeneous real hypersurfaces and hypersurfaces with constant principal curvatures, presenting the results known so far, specially in complex space forms  $\mathbb{C}P^n$  (Section 3.1) and  $\mathbb{C}H^n$  (Section 3.2).

Finally, in Chapter 4 we prove our original classification result about real hypersurfaces with constant principal curvatures and with  $h = 2$  in complex space forms. In Section 4.1 we present several results that are valid for each real hypersurface with constant principal curvatures in a complex space form. In Section 4.2 we develop the central part of the proof. Firstly, in Subsections 4.2.1 to 4.2.5, we obtain enough information about the eigenvalue and eigenspace structure of the shape operator of a generic hypersurface under the conditions of the Main Theorem and, finally in Subsection 4.2.6, we use the standard theory of Jacobi vector fields to conclude the proof.



# Introdución

Unha subvariedade homoxénea dunha variedade de Riemann é unha órbita da acción dun subgrupo pechado do grupo de isometrías da variedade ambiente. Son de especial interese as hipersuperficies homoxéneas, que xorden como órbitas principais de accións de cohomoxeneidade un. Un problema importante en xeometría de subvariedades é o de clasificar as subvariedades homoxéneas dunha variedade de Riemann dada e caracterizalas en termos de datos xeométricos. Unha hipersuperficie ten curvaturas principais constantes se os autovalores do seu operador de configuración son constantes. É claro que as hipersuperficies homoxéneas teñen curvaturas principais constantes. Pero aínda é un problema aberto relevante o de determinar baixo que circunstancias as hipersuperficies con curvaturas principais constantes son partes abertas de hipersuperficies homoxéneas.

Nos espazos de curvatura constante, unha hipersuperficie con curvaturas principais constantes dise isoparamétrica. Segre [40] e Cartan [13] clasificaron as hipersuperficies isoparamétricas nos espazos euclidianos e hiperbólicos reais, respectivamente. Unha consecuencia destes resultados é que sempre son partes abertas de hipersuperficies homoxéneas. Este problema, en cambio, é máis difícil nas esferas. Sexa  $g$  o número de curvaturas principais dunha hipersuperficie isoparamétrica nunha esfera. Cartan clasificou as hipersuperficies con  $g \in \{1, 2, 3\}$ , pero non puido resolver o problema en xeral. Xa nos anos setenta, Hsiang e Lawson [24] clasificaron as accións de cohomoxeneidade un nas esferas, e Münzner [33] amosou que  $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  para as hipersuperficies isoparamétricas en xeral. Sorprendentemente, para  $g = 4$  existen hipersuperficies con curvaturas principais constantes que non son homoxéneas [19]. Nos últimos anos, Cecil, Chi e Jensen [14] e Immervoll [25] probaron que, cunhas poucas posibles excepcións, as hipersuperficies con  $g = 4$  curvaturas principais constantes se atopan entre os exemplos homoxéneos e non homoxéneos coñecidos. Tamén se ten progresado algo no caso  $g = 6$ , pero o problema está aínda aberto.

Nos espazos de curvatura holomorfa constante a situación é tamén complicada. Ó igual ca antes, sexa  $g$  o número de curvaturas principais dunha hipersuperficie real  $M$  con curvaturas principais constantes nun espazo de curvatura holomorfa constante  $c \neq 0$ ; se  $c > 0$  temos un espazo proxectivo complexo  $\mathbb{C}P^n$  e se  $c < 0$  temos un espazo hiperbólico complexo  $\mathbb{C}H^n$ . Sexa  $\xi$  un campo de vectores unitario normal (local) sobre  $M$ . Se  $J$  denota a estrutura de Kähler do espazo de curvatura holomorfa constante, entón  $J\xi$  é tanxente a  $M$  e denomínase campo de Hopf de  $M$ . Dise que  $M$  é Hopf se  $J\xi$  é un campo de vectores principal. Para cada  $p \in M$  sexa  $h(p)$  o número de proxeccións non triviais de  $J\xi_p$  sobre os espazos de curvaturas principais de  $M$ . Esta función  $h$  toma valores enteiros e obviamente  $M$  é Hopf se, e só se,  $h = 1$ .

A clasificación das hipersuperficies homoxéneas no espazo proxectivo complexo débese a Takagi [42]. Séguese desta clasificación que  $g \in \{2, 3, 5\}$ . Unha característica salientable das hipersuperficies reais homoxéneas en  $\mathbb{C}P^n$  é que son todas Hopf. Máis tarde, Takagi clasificou en [43] e [44] as hipersuperficies con  $g \in \{2, 3\}$  curvaturas principais constantes, salvo o caso  $n = 2$ ,  $g = 3$ , que resolveu Wang [47]. Todos os exemplos clasificados nestes resultados son Hopf e partes abertas de hipersuperficies homoxéneas. Kimura [26] clasificou as hipersuperficies reais Hopf con curvaturas principais constantes en  $\mathbb{C}P^n$  e amosou que son todas partes abertas de hipersuperficies homoxéneas. Non se coñecen exemplos de hipersuperficies reais con curvaturas principais constantes en  $\mathbb{C}P^n$  con  $h > 1$ .

A situación é máis interesante en  $\mathbb{C}H^n$  onde, sorprendentemente, existen hipersuperficies reais homoxéneas non Hopf. Tales hipersuperficies reais foron construídas por Berndt e Brück [5], [6]. De feito, con  $h = 3$  existe unha cantidade non numerable de hipersuperficies reais homoxéneas non congruentes con  $g \in \{4, 5\}$ . Berndt e Tamaru obtiveron en [11] a clasificación das accións de cohomoxeneidade un en  $\mathbb{C}H^n$ . Para as hipersuperficies reais homoxéneas resultantes, o número de curvaturas principais é  $g \in \{2, 3, 4, 5\}$ . En [32] Montiel clasificara as hipersuperficies reais con 2 curvaturas principais en  $\mathbb{C}H^n$ ,  $n \geq 3$ . Berndt e Díaz Ramos resolveron os casos  $g = 3$ , e  $g = 2$ ,  $n = 2$  en [8] e [9]. Séguese destes resultados que  $h = 1$  se  $g = 2$  e que  $h \leq 2$  se  $g = 3$ . As hipersuperficies reais Hopf con curvaturas principais constantes en  $\mathbb{C}H^n$  foron clasificadas por Berndt [4], sendo todas elas partes abertas de hipersuperficies homoxéneas. Cremos que as primeiras clasificacións deste tipo involucrando hipersuperficies reais non Hopf son [8] e [9]. Nada se sabe sobre  $h$  se  $g \geq 4$ .

O obxectivo da parte orixinal deste traballo é o de levar a cabo o seguinte paso natural despois das clasificacións de Berndt e Kimura das hipersuperficies reais Hopf con curvaturas principais constantes en  $\mathbb{C}P^n$  e  $\mathbb{C}H^n$  [4], [26]. Así, clasificamos as hipersuperficies reais con curvaturas principais constantes e  $h = 2$  proxeccións non triviais do campo de Hopf  $J\xi$  sobre os espazos de curvaturas principais, tanto en  $\mathbb{C}P^n$  como en  $\mathbb{C}H^n$ .

**Teorema Principal.** *Temos que:*

- (a) *Non existen hipersuperficies con curvaturas principais constantes en  $\mathbb{C}P^n$ ,  $n \geq 2$ , tales que o número de proxeccións non triviais do campo de Hopf sobre os espazos de curvaturas principais sexa  $h = 2$ .*
- (b) *Sexa  $M$  unha hipersuperficie real conexa con curvaturas principais constantes en  $\mathbb{C}H^n$ ,  $n \geq 2$ , tal que o número de proxeccións non triviais do campo de Hopf sobre os espazos de curvaturas principais de  $M$  é  $h = 2$ . Entón  $M$  ten  $g \in \{3, 4\}$  curvaturas principais e é holomorficamente congruente a unha parte aberta de:
  - (i) *unha hipersuperficie minimal regrada  $W^{2n-1} \subset \mathbb{C}H^n$  ou unha das súas hipersuperficies equidistantes, ou*
  - (ii) *un tubo ó redor dunha subvariedade minimal regrada  $W^{2n-k} \subset \mathbb{C}H^n$  para algún  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ .**

*En particular,  $M$  é unha parte aberta dunha hipersuperficie homoxénea de  $\mathbb{C}H^n$ .*

As subvariedades minimais regradas  $W^{2n-k} \subset \mathbb{C}H^n$ ,  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  son homoxéneas e teñen fibrado normal totalmente real de rango  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . A hipersuperficie  $W^{2n-1}$  foi construída por Lohnherr en [30], mentres que Berndt e Brück xeneralizaron esa construción a codimensións superiores en [6]. No Capítulo 2 (Sección 2.3) e en [10] pódese atopar unha descrición detallada da construción destes exemplos.

O obxectivo do presente traballo é o de aproximarnos a unha mellor comprensión da relación entre hipersuperficies homoxéneas e hipersuperficies con curvaturas principais constantes nos espazos de curvatura holomorfa constante. Para iso, desenvolvemos o material preciso para, en primeiro lugar, encadrar este problema no seu adecuado contexto e para, en segundo lugar, comprender a nosa aportación orixinal a esta área da xeometría de subvariedades.

Este traballo estrutúrase do xeito que explicamos a continuación.

No Capítulo 1 presentamos a terminoloxía e notacións que usaremos no resto do traballo. Na Sección 1.1 introducimos os conceptos básicos da teoría de subvariedades dos que imos botar man, en especial a teoría dos campos de vectores de Jacobi. Na Sección 1.2 presentamos algunha notación que empregaremos no que se refire a matrices, grupos e álxebras de Lie. Na Sección 1.3 exporemos de modo pormenorizado a construción dos espazos proxectivo e hiperbólico complexos como espazos de curvatura seccional holomorfa constante e analizaremos a súa estrutura de espazo simétrico.

Con vistas a comprender a construción e propiedades das subvariedades que aparecen no Teorema Principal, no Capítulo 2 profundizamos na descrición do espazo hiperbólico complexo como espazo simétrico de tipo non compacto, o cal nos conducirá a un modelo de  $\mathbb{C}H^n$  como grupo de Lie resoluble (Sección 2.1). Na Sección 2.2 interpretaremos xeometricamente este modelo para, a continuación na Sección 2.3, describir as hipersuperficies que aparecerán no noso teorema de clasificación.

No Capítulo 3 intentamos motivar o estudo das hipersuperficies reais homoxéneas e con curvaturas principais constantes, facendo unha exposición dos resultados que se coñecen ata o de agora, en especial, nos espazos de curvatura holomorfa constante  $\mathbb{C}P^n$  (Sección 3.1) e  $\mathbb{C}H^n$  (Sección 3.2).

Finalmente, no Capítulo 4 demostraremos o resultado orixinal de clasificación das hipersuperficies reais con curvaturas principais constantes e con  $h = 2$  nos espazos proxectivo e hiperbólico complexos. Na Sección 4.1 presentamos varios resultados válidos para calquera hipersuperficie real con curvaturas principais constantes nun espazo de curvatura holomorfa constante. Ó longo da Sección 4.2 desenvolvemos a parte central da proba. Primeiramente, nas Subseccións 4.2.1 a 4.2.5, obtemos suficiente información sobre a estrutura de autoespazos e autovalores do operador de configuración dunha hipersuperficie xenérica nas condicións do Teorema Principal e, finalmente na Subsección 4.2.6, botamos man da teoría estándar dos campos de vectores de Jacobi para concluír a demostración.





# Índice xeral

<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>Introdución</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Xeometría de subvariedades . . . . .	1
1.1.1. Campos de vectores de Jacobi . . . . .	4
1.2. Notación relativa a matrices, grupos e álxebras de Lie . . . . .	6
1.3. Espazos de curvatura seccional holomorfa constante . . . . .	7
1.3.1. O espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^n$ . . . . .	8
1.3.2. O espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$ . . . . .	10
1.3.3. As estruturas riemannianas de $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$ . . . . .	11
1.3.4. $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$ como espazos simétricos . . . . .	14
<b>2. Descrición de <math>\mathbb{C}H^n</math> como grupo de Lie</b>	<b>17</b>
2.1. Estrutura do espazo simétrico $\mathbb{C}H^n$ . . . . .	17
2.1.1. A descomposición en espazos de raíces . . . . .	19
2.1.2. A descomposición de Iwasawa . . . . .	21
2.1.3. O modelo do grupo de Lie resoluble $AN$ . . . . .	23
2.2. Interpretación xeométrica da descomposición de Iwasawa . . . . .	29
2.3. As subvariedades $W^{2n-k}$ e $W_\varphi^{2n-k}$ . . . . .	34
<b>3. Hipersuperficies homoxéneas en <math>\mathbb{C}P^n</math> e <math>\mathbb{C}H^n</math></b>	<b>39</b>
3.1. O problema en $\mathbb{C}P^n$ . . . . .	41
3.2. O problema en $\mathbb{C}H^n$ . . . . .	43
<b>4. Hipersuperficies non Hopf con curvaturas principais constantes</b>	<b>47</b>
4.1. As ecuacións dunha hipersuperficie con curvaturas principais constantes . . . . .	48
4.2. Proba do Teorema Principal . . . . .	50
4.2.1. Un lema a nivel alxébrico . . . . .	50
4.2.2. O campo de vectores $A$ . . . . .	53
4.2.3. Algunhas propiedades dos espazos de curvaturas principais . . . . .	58
4.2.4. Unha cota para o número de curvaturas principais . . . . .	64
4.2.5. A estrutura de autovalores do operador de configuración . . . . .	68
4.2.6. Campos de Jacobi e variedades focais . . . . .	70



# Capítulo 1

## Preliminares

Neste primeiro capítulo introducimos a terminoloxía e notacións básicas para este traballo, no tocante á xeometría de subvariedades, a matrices, grupos e álxebras de Lie e ós espazos de curvatura seccional holomorfa constante, aproveitando para dar unha construción detallada destes últimos.

### 1.1. Xeometría de subvariedades

Sexa  $\bar{M}$  unha variedade de Riemann con métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $M$  unha subvariedade mergullada. A restrición de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $M$  dá lugar a unha métrica inducida sobre  $M$ , que seguiremos denotando por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Por  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla$  denotaremos as conexións de Levi-Civita de  $\bar{M}$  e  $M$ , respectivamente. A exponencial riemanniana de  $\bar{M}$  denotarémola por  $\exp$ . Se  $X$  é un vector ou un campo de vectores,  $\|X\|$  denotará a súa norma,  $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ .

O fibrado normal de  $M$ , isto é, o fibrado dos vectores ortogonais ós espazos tanxentes de  $M$ , denotarase por  $\nu M$ , mentres que o fibrado tanxente denotarase por  $TM$ . Por  $\Gamma(\nu M)$  refirirémonos ó módulo de todos os campos de vectores normais a  $M$  e, se  $\mathfrak{D}$  é unha distribución ó longo de  $M$ ,  $\Gamma(\mathfrak{D})$  denotará o módulo das seccións de tal distribución, é dicir, os campos de vectores  $X$  ó longo de  $M$  tales que  $X_p \in \mathfrak{D}_p$ , para todo  $p \in M$ .

Para cada punto  $p \in M$  tense o seguinte isomorfismo canónico:  $T_p\bar{M} = T_pM \oplus \nu_pM$ . Dado un campo de vectores  $X \in \Gamma(TM)$  sobre  $M$ , poremos  $X^\top$  para refirirnos á proxección ortogonal de  $X$  sobre  $TM$  e  $X^\perp$  para a proxección ortogonal sobre  $\nu M$ .

Se  $V$  é un espazo vectorial dotado dunha métrica e  $W \subset V$  é un subespazo vectorial, denotaremos por  $V \ominus W$  o complemento ortogonal de  $W$  en  $V$ . Aplicaremos a mesma notación a distribucións sobre  $M$  ou subfibrados de  $\bar{M}$  definidos ó longo de  $M$ .

Un concepto central en Xeometría de Riemann é o de curvatura. A formalización e xeneralización deste concepto dá lugar á coñecida definición de tensor de curvatura. Denotaremos por  $\bar{R}$  e  $R$  os tensores de curvatura de  $\bar{M}$  e  $M$ , respectivamente. Neste traballo usaremos o seguinte convenio para o tensor de curvatura de tipo  $(1, 3)$  dunha variedade de Riemann  $\bar{M}$ :

$$\bar{R}_{XY}Z = \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z, \quad X, Y, Z \in \Gamma(T\bar{M}).$$

O tensor de curvatura de tipo  $(0, 4)$  aplicado ós campos de vectores  $X, Y, Z$  e  $W$  denotáremolo por  $\bar{R}_{XYZW} = \langle \bar{R}_{XY}Z, W \rangle$ .

É sabido que o tensor de curvatura  $R$  da subvariedade  $M$  tan só depende da métrica que esteamos considerando sobre  $M$ , polo cal se di que o tensor de curvatura é un invariante xeométrico intrínseco. Pódese estudar a xeometría intrínseca tanto de  $\bar{M}$  como de  $M$ . Non obstante, outro punto de vista é o estudo da xeometría de  $M$  en relación coa xeometría de  $\bar{M}$ . Isto chámase a xeometría extrínseca de  $M$ . A continuación presentamos os conceptos e ecuacións fundamentais da xeometría de subvariedades que son precisos para comprender este traballo. Para consultar os fundamentos da teoría de subvariedades en máis profundidade pódense consultar [7] e [49], entre outros moitos libros de Xeometría de Riemann.

Toda a información sobre a xeometría extrínseca dunha subvariedade está codificada na súa segunda forma fundamental. A *segunda forma fundamental* de  $M$  defínese a través da *fórmula de Gauß*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y),$$

para todo  $X, Y \in \Gamma(TM)$ . A fórmula de Gauß relaciona as conexións de Levi-Civita de  $M$  e  $\bar{M}$  mediante a segunda forma fundamental de  $M$ , que verifica  $II(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$ , para todo  $X, Y \in \Gamma(TM)$ . O *operador de configuración* de  $M$  asociado a un campo normal  $\xi \in \Gamma(\nu M)$  (tamén chamado *operador de forma* ou de *Weingarten*) é o operador lineal autoadxunto sobre  $M$  definido por  $\langle S_\xi X, Y \rangle = \langle II(X, Y), \xi \rangle$ , para todo  $X, Y \in \Gamma(TM)$ . Denotemos por  $\nabla^\perp$  a conexión normal de  $M$ , é dicir,  $\nabla_X^\perp \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp$  para todo  $X \in \Gamma(TM)$  e  $\xi \in \Gamma(\nu M)$ . Entón tense a *fórmula de Weingarten*

$$\bar{\nabla}_X \xi = -S_\xi X + \nabla_X^\perp \xi.$$

A relación entre os tensores de curvatura de  $\bar{M}$  e  $M$  tamén vén dada por medio da segunda forma fundamental. Esta relación denomínase *ecuación de Gauß* e, para  $X, Y, Z, V \in \Gamma(TM)$ , escríbese así:

$$\bar{R}_{XYZW} = R_{XYZW} - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle.$$

Ademais, a ecuación de Gauß que vimos de escribir é tamén válida para subvariedades semi-riemannianas dunha variedade semi-riemanniana.

A *ecuación de Codazzi* vai ser tamén de grande importancia para este traballo

$$(\bar{R}_{XY}Z)^\perp = (\nabla_X^\perp II)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp II)(X, Z),$$

onde a derivada covariante da segunda forma fundamental é

$$(\nabla_X^\perp II)(Y, Z) = \nabla_X^\perp II(Y, Z) - II(\nabla_X Y, Z) - II(Y, \nabla_X Z).$$

A última das tres ecuacións fundamentais de segunda orde da teoría de subvariedades é a *ecuación de Ricci*

$$\langle R_{XY}^\perp \xi, \eta \rangle = \bar{R}_{XY\xi\eta} + \langle [S_\xi, S_\eta]X, Y \rangle,$$

onde  $X, Y \in \Gamma(TM)$ ,  $\xi, \eta \in \Gamma(\nu M)$ , e  $R^\perp$  é o tensor de curvatura do fibrado vectorial normal de  $M$ , tensor que vén definido por  $R_{XY}^\perp \xi = [\nabla_X^\perp, \nabla_Y^\perp] \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi$ .

Dise que unha subvariedade é *totalmente xeodésica* se a súa segunda forma fundamental se anula identicamente,  $II = 0$ . Isto é equivalente a dicir que toda xeodésica de  $M$  é tamén unha xeodésica de  $\bar{M}$ . Intuitivamente, a ecuación de Gauß dinos que as subvariedades totalmente xeodésicas son as que teñen a mesma curvatura có espazo ambiente. Unha subvariedade  $M$  de  $\bar{M}$  dise *regrada* se admite unha foliación cuxas follas son subvariedades totalmente xeodésicas de  $\bar{M}$ .

O *campo de vectores curvatura media*  $H$  dunha subvariedade  $M$  defínese como a traza da segunda forma fundamental, é dicir, con respecto a unha base ortonormal local  $\{E_i\}$  de  $TM$ , temos que  $H = \sum_i II(E_i, E_i)$ . Unha subvariedade dise *minimal* cando o seu campo de vectores curvatura media se anula identicamente. As hipersuperficies minimais aparecen de modo natural como puntos críticos do funcional volume e constitúen un tema actual de interese en Xeometría Diferencial.

Diremos que dúas subvariedades  $M_1$  e  $M_2$  de  $\bar{M}$  son *congruentes* se existe unha isometría de  $\bar{M}$  que leva  $M_1$  en  $M_2$ . Se  $\bar{M}$  é hermitiana e a isometría que leva  $M_1$  en  $M_2$  é unha aplicación holomorfa, entón  $M_1$  e  $M_2$  dinse *holomorficamente congruentes*.

Unha *acción isométrica* dun grupo de Lie  $G$  sobre unha variedade de Riemann  $\bar{M}$  é unha acción diferenciable de  $G$  sobre  $\bar{M}$  mediante isometrías (i.e.,  $G$  identifícase cun subgrupo do grupo de isometrías de  $\bar{M}$ ). Unha subvariedade  $M$  de  $\bar{M}$  dise (*extrinsecamente*) *homoxénea* se é unha órbita dunha acción isométrica sobre  $\bar{M}$  dun subgrupo pechado do grupo de isometrías de  $\bar{M}$ . Chámaselle *cohomoxeneidade* dunha acción isométrica á menor codimensión das órbitas da acción. Dise que  $\bar{M}$  é unha variedade de cohomoxeneidade  $k$  se admite unha acción isométrica de cohomoxeneidade  $k$ . Para unha introdución máis detallada á teoría de accións isométricas consúltese [7], Capítulo 3.

Supoñamos agora que  $M$  é unha hipersuperficie de  $\bar{M}$ , é dicir, unha subvariedade mergullada de codimensión un. Entón, salvo signo, localmente existe un único campo de vectores normal unitario  $\xi \in \Gamma(\nu M)$ . Ademais, a existencia dun campo unitario normal definido globalmente sobre  $M$  equivale á orientabilidade de  $M$ , en caso de que  $\bar{M}$  sexa orientable.

Agora a segunda forma fundamental  $II$  é un múltiplo de  $\xi$ . Denotaremos por  $S = S_\xi$  o operador de configuración respecto de  $\xi$ . As fórmulas de Gauß e de Weingarten escríbense agora así:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \langle SX, Y \rangle \xi, \\ \bar{\nabla}_X \xi &= -SX.\end{aligned}$$

E as ecuacións de Gauß e de Codazzi redúcense a

$$\begin{aligned}\bar{R}_{XYZW} &= R_{XYZW} - \langle SY, Z \rangle \langle SX, W \rangle + \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle, \\ \bar{R}_{XYZ\xi} &= \langle (\nabla_X S)Y - (\nabla_Y S)X, Z \rangle,\end{aligned}$$

mentres que a ecuación de Ricci non aporta información no caso de hipersuperficies.

Posto que, en Xeometría de Riemann, o operador de configuración  $S$  dunha hipersuperficie  $M \subset \bar{M}$  é autoadxunto, é entón diagonalizable nunha base ortonormal. A cada autovalor de  $S$  nun punto  $p \in M$  chámase curvatura principal de  $M$  no punto  $p$ . Globalmente, dicimos que  $\lambda: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  é unha *curvatura principal* de  $M$  no aberto  $U$  (asociada ó campo unitario normal  $\xi$  definido, polo menos, en  $U$ ) se existe un campo de vectores  $X \in \Gamma(TU)$  tal que  $SX = \lambda X$ .

Se  $\lambda$  é unha curvatura principal, denotaremos por  $T_\lambda(p)$  o autoespazo en  $T_p M$  asociado a  $\lambda(p)$  e chamáremoslle *espazo de curvatura principal* asociado a  $\lambda(p)$ . Se  $v \in T_\lambda(p)$ ,  $v \neq 0$ , dise que  $v$  é un *vector de curvatura principal* de  $\lambda$  en  $p$ . Débese salientar que, en xeral, os espazos de curvaturas principais asociados a unha curvatura principal  $\lambda$  non teñen por que ter a mesma dimensión para todo punto da hipersuperficie.

Unha hipersuperficie  $M$  dise con *curvaturas principais constantes* se as curvaturas principais son as mesmas para todo punto de  $M$ . É dicir, as funcións curvatura principal  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$  son constantes. Neste caso os espazos de curvaturas principais asociados a un autovalor  $\lambda$  teñen a mesma dimensión en todo punto, a cal se denomina *multiplicidade* da curvatura principal  $\lambda$ . Por  $T_\lambda$  refirirémonos á distribución sobre  $M$  formada polos espazos de curvaturas principais de  $\lambda$ , e por  $\Gamma(T_\lambda)$  ó conxunto de todas as seccións de  $T_\lambda$ , é dicir, os campos de vectores  $X \in \Gamma(TM)$  tales que  $SX = \lambda X$ .

### 1.1.1. Campos de vectores de Jacobi

Un método importante en teoría de subvariedades baséase no uso de campos de vectores de Jacobi para estudar o comportamento xeométrico dunha subvariedade cando esta se despraza ó longo de direccións normais. Neste apartado mencionaremos brevemente as características deste método que serán necesarias para o noso estudo posterior. Para un estudo máis pormenorizado pódese consultar [7], Capítulo 8.

Primeiramente, se  $M$  é unha subvariedade mergullada de  $\bar{M}$  con codimensión superior a un e  $r \in [0, \infty)$ , dise que o conxunto  $\{\exp(r\xi) : \xi \in \nu M, \|\xi\| = 1\}$ , en caso de ser unha hipersuperficie de  $\bar{M}$ , é un *tubo* de radio  $r$  ó redor de  $M$ . Localmente, se  $r$  é suficientemente pequeno, tal conxunto é sempre un tubo.

Sexa agora  $M$  unha hipersuperficie en  $\bar{M}$  e  $\xi$  un campo unitario normal sobre  $M$ . O obxectivo é o estudo de propiedades xeométricas locais do desprazamento de  $M$  na dirección indicada por  $\xi$  a unha distancia  $r$ . Podemos supor, por tanto, que  $\xi$  está definido globalmente sobre  $M$ .

Para cada  $r \in \mathbb{R}$ , consideremos a aplicación diferenciable  $\Phi^r: M \rightarrow \bar{M}$  definida por  $\Phi^r(p) = \exp_p(r\xi_p)$ , para  $p \in M$ , onde  $\exp_p$  é a aplicación exponencial de  $\bar{M}$  en  $p$ . As aplicacións  $\Phi^r$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , parametrizan o desprazamento paralelo de  $M$  ó longo de xeodésicas normais a  $M$ : se  $r > 0$ , a cada punto  $p$  de  $M$  asóciase o punto de  $\bar{M}$  obtido a partir de  $p$  desprazándose unha distancia  $r$  ó longo da xeodésica  $\gamma_p(t) = \exp_p(t\xi_p)$ , que é a xeodésica de  $\bar{M}$  que parte de  $p$  con velocidade inicial  $\xi_p$ ; se  $r < 0$  a interpretación é a mesma, só que cambiando  $\xi_p$  por  $-\xi_p$  (i.e., vaise no sentido oposto); se  $r = 0$ , cada punto  $p$  queda fixo.

Para  $v \in T_p M$ , denotaremos por  $\zeta_v$  o campo de Jacobi ó longo de  $\gamma_p$  con condicións

iniciais  $\zeta_v(0) = v$  e  $\zeta'_v(0) = -S_p v$ . O campo  $\zeta_v$  verifica a ecuación de Jacobi

$$\zeta_v'' + \bar{R}_{\zeta_v \dot{\gamma}_p} \dot{\gamma}_p = 0, \quad \zeta_v(0) = v, \quad \zeta'_v(0) = -S_p v,$$

onde  $\dot{\gamma}_p$  denota o campo vectorial tanxente a  $\gamma_p$  e a prima ' indica a derivada covariante dun campo de vectores ó longo dunha curva. Sexa  $\alpha$  calquera curva diferenciable en  $M$  con  $\dot{\alpha}(0) = v$ ; entón  $\zeta_v$  é o campo variacional da variación  $V(t, s) = \exp_{\alpha(s)}(t\xi_{\alpha(s)})$ . Definimos a curva  $\alpha^r = \Phi^r \circ \alpha$ , e un campo de vectores  $\eta^r$  ó longo de  $\alpha^r$  mediante  $\eta^r(\alpha(s)) = \dot{\gamma}_{\alpha(s)}(r)$ . En xeral, usaremos a notación  $\eta^r(p)$  para denotar  $\dot{\gamma}_p(r)$ ; nótese que  $\eta^r(p)$  non é un vector tanxente en  $p$ , senón en  $\Phi^r(p) = \gamma_p(r)$ .

Por tanto, denotando a diferencial de  $\Phi^r$  por  $\Phi_{*p}^r$ , temos que

$$\begin{aligned} \zeta_v(r) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} V(r, s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_{\alpha(s)}(r\xi_{\alpha(s)}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \gamma_{\alpha(s)}(r) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Phi^r \circ \alpha)(s) = \Phi_{*p}^r \dot{\alpha}(0) = \Phi_{*p}^r v, \\ \zeta'_v(r) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=r} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} V(t, s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=r} V(t, s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=r} \gamma_{\alpha(s)}(t) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \dot{\gamma}_{\alpha(s)}(r) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \eta^r(\alpha(s)) = (\bar{\nabla}_s \eta^r)(0), \end{aligned}$$

onde agora pomos  $\bar{\nabla}_s \eta^r$  para denotar a derivada covariante do campo  $\eta^r$  definido ó longo da curva  $\alpha^r$ . Nótese que, se  $\Phi_{*p}^r v \neq 0$ , entón localmente  $\alpha^r$  é unha curva mergullada, co cal todo campo definido localmente ó longo dela é estendible nunha certa veciñanza, polo que tamén se tería que  $(\bar{\nabla}_s \eta^r)(0) = \bar{\nabla}_{\Phi_{*p}^r v} \eta^r$ .

Salientamos entón as seguintes relacións:

$$\zeta_v(r) = \Phi_{*p}^r v, \quad \zeta'_v(r) = (\bar{\nabla}_s \eta^r)(0).$$

Así,  $\Phi^r$  non é unha inmersión en  $p$  se, e só se, existe un campo de Jacobi non nulo do tipo  $\zeta_v$  ó longo de  $\gamma_p$ , para algún  $v \in T_p M$ , e tal que  $\zeta_v(r) = 0$ . Neste caso,  $\Phi^r(p)$  denomínase *punto focal* de  $M$  ó longo de  $\gamma_p$  e a dimensión de  $\ker \Phi_{*p}^r$  chámase *multiplicidade do punto focal*. Se existe un enteiro positivo  $k$  tal que  $\Phi^r(q)$  é un punto focal de  $M$  ó longo de  $\gamma_q$  con multiplicidade  $k$  para todo  $q$  nunha veciñanza aberta  $U$  de  $p$ , e se  $U$  é suficientemente pequena, entón  $\Phi^r|_U$  parametriza unha subvariedade mergullada de  $\bar{M}$  de dimensión  $\dim \bar{M} - k - 1$ , que se denomina *subvariedade focal* de  $M$ . Ademais,  $U$  é un tubo de radio  $r$  ó redor da subvariedade  $\Phi^r(U)$ .

Se  $\Phi^r(p)$  non é un punto focal de  $M$  ó longo de  $\gamma_p$ , entón  $\Phi_{*p}^r$  é unha inmersión nunha veciñanza aberta  $U$  de  $p$  e, se  $U$  é suficientemente pequena,  $\Phi^r|_U$  parametriza unha hipersuperficie mergullada de  $\bar{M}$ , que se chama *hipersuperficie equidistante* a  $M$ . Nambos casos, o vector  $\eta^r(p) = \dot{\gamma}_p(r)$  é un vector unitario normal en  $\Phi^r(p)$  á subvariedade focal ou á hipersuperficie equidistante.

## 1.2. Notación relativa a matrices, grupos e álgebras de Lie

A continuación expoñemos os convenios de notación que usaremos neste traballo, no tocante ó cálculo con matrices, ós grupos de Lie e ás álgebras de Lie.

En relación ós grupos de matrices reais e complexos clásicos, adoptaremos a seguinte notación (que, de feito, é a máis común). Por  $\mathbb{F}$  referirémonos ó corpo  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Sexa  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}^n$  un elemento de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  (que, de ser preciso, pensáremolo coma un vector columna), e  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  unha matriz cadrada de orde  $n$  con coeficientes en  $\mathbb{F}$ . A matriz  $A$  actúa sobre  $\mathbb{F}^n$  do xeito usual:  $(Av)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}v_k$ . De modo máis xeral, dúas matrices  $A = (a_{ij})$  de orde  $n \times m$  e  $B = (b_{ij})$  de orde  $m \times r$  multiplícanse mediante o criterio de filas  $\times$  columnas:  $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$ . A trasposta, a conxugada e a adxunta (trasposta da conxugada) dunha matriz  $A$  denotarémolas por  $A^t$ ,  $\bar{A}$  e  $A^* = \bar{A}^t$ , respectivamente. As mesmas notacións aplicarémolas a vectores  $v$ .

Dada unha matriz cadrada ou un endomorfismo de espazos vectoriais  $A$ , a traza e o determinante de  $A$  denotaranse por  $\text{tr } A$  e  $\det A$ , respectivamente.

Denotaremos por  $I_n$  a matriz identidade de orde  $n$  e designaremos

$$I_{1,n} = \left( \begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right).$$

Por  $e_i$  denotaremos o  $i$ -ésimo vector da base canónica de  $\mathbb{F}^n$ . Se  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re } z$  e  $\text{Im } z$  denotarán as súas partes real e imaxinaria, respectivamente.

Como é habitual na literatura, para un grupo de Lie  $G$ , escribiremos con letras góticas a súa álgebra de Lie, neste caso, por exemplo,  $\mathfrak{g}$ . A exponencial de grupos de Lie denotarémola por  $\text{Exp}$ , para diferenciala da exponencial riemanniana  $\exp$ . Se  $g$  é un elemento dun grupo de Lie  $G$ , designaremos por  $L_g$  a multiplicación por  $g$  pola esquerda,  $x \in G \mapsto L_g(x) = gx$ , e por  $R_g$  a multiplicación por  $g$  pola dereita. Se  $f: G \rightarrow H$  é un homomorfismo de grupos de Lie,  $f_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  denotará a súa diferencial.

Por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$  denotaremos a álgebra de Lie do grupo lineal xeral  $GL(n, \mathbb{F})$ , que consiste no espazo vectorial de todas as matrices cadradas de orde  $n$  con coeficientes no corpo  $\mathbb{F}$ , e onde se define o corchete de Lie como o conmutador  $[X, Y] = XY - YX$ . Nas álgebras de Lie dos grupos de matrices o corchete de Lie é a restrición do corchete de Lie de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ , é dicir, é tamén o conmutador.

Nun grupo de Lie  $G$ , se  $g \in G$  e se  $\varphi_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$  é o automorfismo de conxugación por  $g$ ,  $\text{Ad}: g \in G \mapsto \text{Ad}(g) = (\varphi_g)_* \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  é a aplicación adxunta. A súa diferencial denotarémola por  $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$  e tense que  $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .



### 1.3. Espazos de curvatura seccional holomorfa constante

No ámbito xeral das variedades de Riemann, aquelas con tensor de curvatura máis sinxelo son as que teñen curvatura seccional constante, é dicir, independente do punto da variedade e do subespazo 2-dimensional do espazo tanxente escollido. Estas variedades denomínanse *espazos de curvatura constante*. É un resultado coñecido que, salvo isometría, os únicos espazos de curvatura constante completos e simplemente conexos son os espazos euclidianos  $\mathbb{R}^n$ , as esferas  $S^n$  e os espazos hiperbólicos  $\mathbb{R}H^n$ .

No campo das variedades de Kähler, pola contra, o concepto de espazo de curvatura constante non ten especial relevancia, debido ó seguinte resultado (véxase [49], por exemplo):

**Proposición 1.1.** *Sexa  $\bar{M}$  una variedade de Kähler de dimensión real  $2n$ . Se  $\bar{M}$  ten curvatura seccional constante e  $n > 1$ , entón  $\bar{M}$  é chá.*

Debido a isto, para variedades de Kähler, introdúcese o concepto de curvatura seccional holomorfa constante. Así, se  $\bar{M}$  é unha variedade de Kähler con estrutura complexa  $J$  e tensor de curvatura  $\bar{R}$ , defínese a *curvatura seccional holomorfa*  $K_{hol}$  de  $\bar{M}$  como a restrición da curvatura seccional usual  $K$  ós subespazos 2-dimensionais  $J$ -invariantes do espazo tanxente a un punto. Posto que estes subespazos son xerados por pares  $\{v, Jv\}$ , con  $v \in T_p\bar{M}$ ,  $p \in \bar{M}$ , pódese ver  $K_{hol}$  como unha función que asigna un número real  $K_{hol}(v)$  a cada vector tanxente unitario  $v \in T\bar{M}$  do seguinte xeito:

$$K_{hol}(v) = K(v, Jv) = \bar{R}_{vJvJv}.$$

Dise entón que a variedade de Kähler  $\bar{M}$  ten *curvatura seccional holomorfa constante* se  $K_{hol}(v)$  é constante para todo vector unitario  $v$  tanxente a  $\bar{M}$ . Isto equivale a que exista un constante real  $c$  tal que  $K_{hol}(v) = c \|v\|^4$  para todo  $v \in T\bar{M}$ .

O seguinte resultado dános unha expresión para o tensor de curvatura  $\bar{R}$  dunha variedade de Kähler con curvatura seccional holomorfa constante. A súa demostración pódese atopar, por exemplo, en [20] ou [49].

**Proposición 1.2.** *Unha variedade de Kähler  $\bar{M}$  é de curvatura seccional holomorfa constante se, e só se, o seu tensor de curvatura  $\bar{R}$  vén dado pola seguinte fórmula:*

$$\bar{R}_{XY}Z = \frac{c}{4} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y + \langle JY, Z \rangle JX - \langle JX, Z \rangle JY - 2\langle JX, Y \rangle JZ),$$

onde  $c$  é unha constante real.

Neste caso, a constante  $c$  é a mesma cá que verifica que  $K_{hol}(v) = c \|v\|^4$  para todo  $v \in T\bar{M}$  e dise que  $\bar{M}$  ten curvatura seccional holomorfa constante  $c$ .

As variedades con curvatura seccional holomorfa constante son localmente simétricas. Ademais, verifícase que toda variedade completa e simplemente conexa con curvatura seccional holomorfa constante  $c$  é isométrica a un dos seguintes espazos [49]:

- o espazo euclidiano complexo  $\mathbb{C}^n$ , se  $c = 0$ ,
- o espazo proxectivo complexo  $\mathbb{C}P^n$ , se  $c > 0$ ,
- o espazo hiperbólico complexo  $\mathbb{C}H^n$ , se  $c < 0$

e toda variedade con curvatura seccional holomorfa constante  $c$  é localmente isométrica a un destes espazos. O primeiro deles non é máis có espazo euclidiano  $\mathbb{R}^{2n}$  dotado dunha métrica de Kähler chá. Os outros dous espazos describirémolos en detalle máis adiante nesta sección, debido á súa relevancia para este traballo.

As variedades de Kähler completas e simplemente conexas con curvatura seccional holomorfa constante denominarémolas *espazos modelo de curvatura seccional holomorfa constante* ou, simplemente, *espazos de curvatura holomorfa constante*. Estes espazos redúcense, por tanto, ás tres familias anteriores.

Introduzamos a seguinte notación para o resto deste traballo. Poremos  $\mathbb{C}P^n(c)$  para denotar o espazo proxectivo complexo de curvatura seccional holomorfa  $c > 0$  e  $\mathbb{C}H^n(c)$  para o hiperbólico, con  $c < 0$ ; en caso de que se sobreentenda canto vale a curvatura seccional holomorfa, poremos simplemente  $\mathbb{C}P^n$  e  $\mathbb{C}H^n$ . Por  $\bar{M}^n(c)$  denotaremos o único espazo (salvo isometría) de curvatura seccional holomorfa constante  $c$  completo e simplemente conexo, que se refirirá, por tanto, ou a  $\mathbb{C}^n$  se  $c = 0$ , ou a  $\mathbb{C}P^n$  se  $c > 0$  ou a  $\mathbb{C}H^n$  se  $c < 0$ .

Nos dous seguintes apartados, construímos (seguindo o artigo [34]) as variedades diferenciáveis  $\mathbb{C}P^n$  e  $\mathbb{C}H^n$  e presentamos a notación e os resultados precisos para, a continuación, adoptar un enfoque unificado que nos permita introducir as súas correspondentes métricas de Kähler, para finalmente indicar por qué son espazos de curvatura seccional holomorfa constante. Os fundamentos da teoría de variedades Kähler necesarios para comprender os seguintes apartados pódense consultar, por exemplo, en [27] e [49].

### 1.3.1. O espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^n$

Como variedade diferenciable, o espazo proxectivo complexo de dimensión  $n$  (dimensión real  $2n$ ) defínese como o espazo de rectas complexas de  $\mathbb{C}^{n+1}$  que pasan pola orixe, ou, equivalentemente, como a variedade cociente dunha esfera  $S^{2n+1}(r) \subset \mathbb{C}^{n+1}$  (de radio  $r$  e centrada na orixe) pola relación de equivalencia  $z \sim \lambda z'$ ,  $z, z' \in \mathbb{C}^{n+1}$ ,  $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$ . Denotaremos por  $\pi$  a proxección canónica de  $S^{2n+1}(r)$  sobre o espazo proxectivo complexo:

$$\pi: S^{2n+1}(r) \longrightarrow \mathbb{C}P^n.$$

É coñecido que  $\pi$  é unha submersión diferenciable sobrexectiva que se denomina *aplicación de Hopf*.

A métrica que consideraremos en  $\mathbb{C}P^n$  será a inducida de xeito natural pola métrica usual de  $S^{2n+1}(r)$ . Destacamos a continuación algunhas das propiedades da xeometría de  $S^{2n+1}(r)$  que precisaremos máis adiante.

Primeiramente, definimos

$$\langle z, w \rangle = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n z_k \bar{w}_k,$$

para  $z = (z_0, \dots, z_n), w = (w_0, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ , onde  $\text{Re}$  denota a parte real dun complexo. A esfera  $(2n + 1)$ -dimensional de radio  $r$  é entón

$$S^{2n+1}(r) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, z \rangle = r^2\}.$$

Pódese considerar  $\mathbb{C}^{n+1}$  como  $\mathbb{R}^{2n+2}$  e definir entón  $u, v \in \mathbb{R}^{2n+2}$  mediante

$$z_k = u_{2k} + u_{2k+1}i, \quad w_k = v_{2k} + v_{2k+1}i.$$

É dicir, denotaremos por  $(u_0, u_1, \dots, u_{2n+1})$  as coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^{2n+2}$ . Así:

$$\langle z, w \rangle = \langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k v_k,$$

isto é, estamos considerando o produto escalar usual sobre  $\mathbb{R}^{2n+2}$ . Denotaremos por  $\tilde{J}$  o operador definido en  $\mathbb{C}^{n+1}$  consistente en multiplicar polo escalar complexo  $i$ .

Para cada  $z \in S^{2n+1}(r)$ , o espazo tanxente á esfera é

$$T_z S^{2n+1}(r) = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, w \rangle = 0\}.$$

Consideraremos sobre  $S^{2n+1}(r)$  a métrica de Riemann dada pola restrición de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , e o campo unitario normal  $\xi$  dado por

$$\xi_z = \frac{1}{r}z.$$

Denotemos por  $D$  a conexión de Levi-Civita de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  (que actúa sobre un campo de vectores derivando as súas compoñentes cartesianas). Se  $S$  é o operador de configuración de  $S^{2n+1}(r)$  e  $X$  un campo tanxente ( $X = \sum_{j=0}^{2n+1} x_j \frac{\partial}{\partial u_j}$  en coordenadas locais), entón

$$SX = -D_X \xi = -\frac{1}{r} D_X \left( \sum_{i=0}^{2n+1} u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) = -\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{2n+1} X u_i \frac{\partial}{\partial u_i} = -\frac{1}{r} \sum_{i=0}^{2n+1} \sum_{j=0}^{2n+1} x_j \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial u_i} = -\frac{1}{r} X.$$

Así pois, a fórmula de Gauß implica que a conexión de Levi-Civita  $\tilde{\nabla}$  de  $S^{2n+1}(r)$  vén dada por

$$\tilde{\nabla}_X Y = D_X Y + \frac{\langle X, Y \rangle}{r} \xi,$$

para  $X, Y$  campos tanxentes a  $S^{2n+1}(r)$ . Mediante a ecuación de Gauß, obtense o tensor de curvatura  $\tilde{R}$  de  $S^{2n+1}(r)$ :

$$\tilde{R}_{XY} Z = \frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Na Subsección 1.3.3 continuaremos esta exposición introducindo a estrutura riemanniana sobre o espazo proxectivo complexo, onde adoptaremos un enfoque común a  $\mathbb{C}P^n$  e  $\mathbb{C}H^n$ .

### 1.3.2. O espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$

A construción do espazo hiperbólico complexo é análoga á de  $\mathbb{C}P^n$ , aínda que cunhas diferenzas significativas. Para empezar, en lugar do produto escalar usual de  $\mathbb{C}^{n+1}$  defínese

$$\langle z, w \rangle = \operatorname{Re} \left( -z_0 \bar{w}_0 + \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k \right),$$

para  $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Usando a mesma identificación  $\mathbb{C}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{2n+2}$  ca no apartado anterior, temos que

$$\langle z, w \rangle = \langle u, v \rangle = -u_0 v_0 - u_1 v_1 + \sum_{k=2}^{2n+1} u_k v_k.$$

É dicir, trátase dunha métrica semi-riemanniana de signatura  $(2, 2n)$ . Consideremos o espazo de anti de Sitter (o análogo lorentziano do espazo hiperbólico real) de radio  $r$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , que se define como

$$H_1^{2n+1}(r) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, z \rangle = -r^2\}.$$

O espazo tanxente a  $H_1^{2n+1}(r)$  en  $z$  é

$$T_z H_1^{2n+1}(r) = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, w \rangle = 0\}.$$

Restrinximos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $H_1^{2n+1}(r)$  para obter unha métrica de Lorentz cuxa conexión de Levi-Civita  $\tilde{\nabla}$  vén dada por

$$\tilde{\nabla}_X Y = D_X Y - \frac{\langle X, Y \rangle}{r} \xi,$$

para  $X, Y$  tanxentes a  $H_1^{2n+1}(r)$ , e onde  $\xi$  designa o campo unitario normal definido por

$$\xi_z = \frac{1}{r} z.$$

A xustificación disto é análoga á do caso proxeectivo, coa única diferenza de que, neste caso,  $\langle \xi, \xi \rangle = -1$ .

Da ecuación de Gauß obtemos o tensor de curvatura  $\tilde{R}$  de  $H_1^{2n+1}(r)$

$$\tilde{R}_{XY} Z = -\frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Definimos a variedade  $\mathbb{C}H^n$  como a imaxe de  $H_1^{2n+1}(r)$  mediante a proxección canónica  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  do espazo proxeectivo complexo:

$$\pi: H_1^{2n+1}(r) \longrightarrow \mathbb{C}H^n \subset \mathbb{C}P^n.$$

Equivalentemente,  $\mathbb{C}H^n$  é o espazo de rectas complexas negativas de  $\mathbb{C}^{n+1}$  (respecto da métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de signatura  $(2, 2n)$ ).

O hiperplano complexo de  $\mathbb{C}^{n+1}$  definido por  $z_0 = 0$  non corta a  $H_1^{2n+1}(r)$ . Polo tanto, o hiperplano proxectivo complexo de  $\mathbb{C}P^n$  de ecuación  $z_0 = 0$  non corta a  $\mathbb{C}H^n$ . Así pois,  $\mathbb{C}H^n$  está contido na carta afín  $z_0 \neq 0$  de  $\mathbb{C}P^n$ , polo que

$$\mathbb{C}H^n = \{\pi(1, z_1, \dots, z_n) : -1 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 0\},$$

onde aquí  $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  é a proxección canónica. Noutras palabras,  $\mathbb{C}H^n = \pi(\{1\} \times B_{\mathbb{C}^n}(0, 1))$ , co cal  $\mathbb{C}H^n$  é difeomorfo a unha bóla aberta usual de  $\mathbb{C}^n$ .

Polo tanto,  $\mathbb{C}H^n$  é unha subvariedade diferenciable aberta de  $\mathbb{C}P^n$ . Non obstante, no seguinte apartado dotaremos a estes dous espazos de métricas riemannianas diferentes.

### 1.3.3. As estruturas riemannianas de $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$

Debido ás analogías entre  $\mathbb{C}P^n$  e  $\mathbb{C}H^n$  e para abordar nunha soa liña expositiva o estudo de ambos espazos, introducimos o símbolo  $\varepsilon$ , que valerá 1 no caso proxectivo e  $-1$  no hiperbólico. Así, por exemplo, o tensor de curvatura virá dado por

$$\tilde{R}_{XY}Z = \frac{\varepsilon}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Tamén poremos  $\tilde{M}$  en lugar de  $\mathbb{C}P^n$  ou  $\mathbb{C}H^n$ , e  $\tilde{M}$  en vez de  $S^{2n+1}(r)$  ou  $H_1^{2n+1}(r)$ . A proxección que se considerará neste apartado será  $\pi: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$ .

Primeiramente, observemos que, nambos casos, a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é de Kähler. Para comprobalo, chega con darse conta de que, nas coordenadas habituais, os símbolos de Christoffel da conexión de Levi-Civita  $D$  son todos nulos; un sinxelo cálculo en coordenadas permite entón concluír que  $D_X \tilde{J}Y = \tilde{J}D_X Y$ , para calquera dous campos diferenciables  $X, Y$  sobre  $\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ , polo que  $D\tilde{J} = 0$ .

Designaremos por  $V$  o campo unitario tanxente a  $\tilde{M}$  definido por  $V = \tilde{J}\xi$ . Obsérvese que  $\langle \xi, \xi \rangle = \langle V, V \rangle = \varepsilon$ .

Podemos descompor ortogonalmente o espazo tanxente a  $\tilde{M}$  nas chamadas compoñentes vertical e horizontal,

$$T\tilde{M} = \mathbb{R}V \oplus V^\perp.$$

Sexa  $z$  un punto calquera de  $\tilde{M}$ .

Notemos antes de nada que  $\mathbb{R}V_z$  é xusto o núcleo da diferencial  $\pi_{*z}$  da proxección canónica, polo que  $\pi_{*z}$  envía  $V_z^\perp$  isomorficamente sobre  $T_{\pi(z)}\bar{M}$ . Isto permite definir, para un vector  $X \in T_{\pi(z)}\bar{M}$  (analogamente, para un campo  $X \in \Gamma(T\bar{M})$ ) o *levantamento horizontal*  $X_z^L$  de  $X$  a  $z$ , como o único vector (resp. campo) en  $V_z^\perp$  (resp. en  $\Gamma(V^\perp)$ ) que proxecta a  $X$ , i.e.,  $\pi_* X_z^L = X$ . Nótese que o levantamento horizontal  $X^L$  está ben definido para cada punto  $z \in \tilde{M}$  ó que se levanta o vector  $X$ .

Consideremos a xeodésica  $t \mapsto \varphi_t(z)$  sobre  $\tilde{M}$  que parte de  $z$  con velocidade inicial  $\tilde{J}z = iz = rV_z$ , a cal nos dá a fibra sobre  $\pi(z)$ :  $\pi^{-1}(\pi(z)) = \{e^{it}z : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ . Nótese que  $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  nos dá un grupo uniparamétrico de isometrías; de feito,  $\varphi_t$  pódese expresar na forma matricial  $e^{it}I$ , sendo  $I$  a matriz identidade (obsérvese que  $e^{it}I \in U(n+1)$  para

$\varepsilon = 1$  e  $e^{it}I \in U(1, n)$  para  $\varepsilon = -1$ ). Ademais, por preservaren as fibras, cumpren que  $\pi \circ \varphi_t = \pi$ . Isto implica que, se  $X \in T_{\pi(z)}\bar{M}$ , entón  $\pi_{*e^{it}z}(\varphi_t)_{*z}X_z^L = \pi_{*z}X_z^L = X$  e, como  $(\varphi_t)_{*z}X_z^L \in V_{\varphi_t(z)}^\perp$  por ser  $X_z^L \in V_z^\perp$  e  $\varphi_t$  isometría, temos que  $X_{\varphi_t(z)}^L = (\varphi_t)_{*z}X_z^L$ .

Definamos a estrutura case complexa  $J$  de  $\bar{M}$  mediante  $JX = \pi_*(\tilde{J}X^L)$ , para  $X \in \Gamma(T\bar{M})$  ou, equivalentemente, mediante  $J\pi_*X = \pi_*(\tilde{J}X)$ , para  $X \in \Gamma(V^\perp)$ . Está ben definida porque se  $X_z^L$  e  $X_{e^{it}z}^L$  (con  $t \in \mathbb{R}$ ) son dous levantamentos horizontais de  $X$  entón  $(\varphi_t)_{*z}(\tilde{J}X_z^L) = \tilde{J}X_{e^{it}z}^L$  (pois pódese facer a identificación  $(\varphi_t)_{*z} \equiv e^{it}I$ , co cal se ve que  $(\varphi_t)_{*z}$  e  $\tilde{J}$  conmutan), e a relación  $\pi \circ \varphi_t = \pi$  permite concluír que  $\pi_{*z}(\tilde{J}X_z^L) = \pi_{*e^{it}z}(\tilde{J}X_{e^{it}z}^L)$ . Ademais, é claro que  $J$  é lineal e, como  $V^\perp$  é  $\tilde{J}$ -invariante, séguese que  $J^2 = -\text{id}$ .

Para introducir unha métrica de Riemann en  $\bar{M}$  téñense descrito varios métodos. O que seguiremos nós é o de pedir que a proxección  $\pi$  sexa unha submersión semi-riemanniana. Isto quere dicir que cada  $\pi_{*z}$  envíe  $(\ker \pi_{*z})^\perp = V_z^\perp$  isometricamente sobre  $T_{\pi(z)}\bar{M}$ . Así, para campos ou vectores tanxentes  $X, Y$  en  $\bar{M}$  definimos a métrica mediante  $\langle X, Y \rangle = \langle X^L, Y^L \rangle$ . É doado comprobar que é unha definición correcta, pois as isometrías  $\varphi_t$  actúan transitivamente nas fibras, e tamén que se trata dunha métrica hermitiana, pois se  $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$  entón

$$\langle JX, JY \rangle = \langle (\pi_*(\tilde{J}X^L))^L, (\pi_*(\tilde{J}Y^L))^L \rangle = \langle \tilde{J}X^L, \tilde{J}Y^L \rangle = \langle X^L, Y^L \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

As fórmulas estándar das submersións semi-riemannianas (véxase, por exemplo, [35]) permítennos obter a conexión de Levi-Civita  $\bar{\nabla}$  de  $\bar{M}$ , que vén dada por

$$\bar{\nabla}_X Y = \pi_* \left( \tilde{\nabla}_{X^L} Y^L \right),$$

para campos  $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ .

Ademais, a métrica que consideramos sobre  $\bar{M}$  é de Kähler. En efecto, sexan  $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ . Por  $(\cdot)^\top$ ,  $(\cdot)^\perp$ ,  $(\cdot)_{\mathbb{R}V}$  e  $(\cdot)_{V^\perp}$  denotamos, respectivamente, as proxeccións sobre o tanxente a  $\bar{M}$ , o normal a  $\bar{M}$ , a distribución  $\mathbb{R}V$  e a distribución  $V^\perp$ . Temos que:

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X J)Y &= \bar{\nabla}_X JY - J\bar{\nabla}_X Y = \pi_* \left( \tilde{\nabla}_{X^L} (JY)^L \right) - J \left( \pi_* \tilde{\nabla}_{X^L} Y^L \right) \\ &= \pi_* \left( \tilde{\nabla}_{X^L} \tilde{J}Y^L - \tilde{J}(\tilde{\nabla}_{X^L} Y^L)_{V^\perp} \right) \\ &= \pi_* \left( (D_{X^L} \tilde{J}Y^L)^\top - \tilde{J}(D_{X^L} Y^L)_{V^\perp} \right) \\ &= \pi_* \left( (D_{X^L} \tilde{J}Y^L)_{V^\perp} + (D_{X^L} \tilde{J}Y^L)_{\mathbb{R}V} - (\tilde{J}D_{X^L} Y^L)_{V^\perp} \right) = 0, \end{aligned}$$

onde se tivo en conta que  $V^\perp$  é unha distribución invariante por  $\tilde{J}$ , que  $\ker \pi_* = \mathbb{R}V$  e que a métrica en  $\mathbb{C}^{n+1}$  é de Kähler (logo  $D\tilde{J} = 0$ ). Dedúcese, en particular, que a estrutura case complexa  $J$  sobre  $\bar{M}$  é integrable, polo que  $\bar{M}$  é unha variedade complexa con estrutura complexa  $J$  (cf. [27], Teorema 4.3, ou [49], Teorema 3.2).

Finalmente xustificaremos por que  $\bar{M}$  ten curvatura seccional holomorfa constante. Botamos man, de novo, dun par de ecuacións da teoría de submersións semi-riemannianas

(véxase [35]):

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X^L} Y^L &= (\bar{\nabla}_X Y)^L + \frac{1}{2} [X^L, Y^L]_{\mathbb{R}V}, \\ \bar{K}(X, Y) &= \tilde{K}(X^L, Y^L) + \frac{3\langle [X^L, Y^L]_{\mathbb{R}V}, [X^L, Y^L]_{\mathbb{R}V} \rangle}{4(\langle X^L, X^L \rangle \langle Y^L, Y^L \rangle - \langle X^L, Y^L \rangle^2)},\end{aligned}$$

onde  $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ , e  $\bar{K}$  e  $\tilde{K}$  denotan as curvaturas seccionais de  $\bar{M}$  e  $\tilde{M}$ , respectivamente. Entón:

$$\begin{aligned}\langle [X^L, Y^L], V \rangle &= 2\langle \tilde{\nabla}_{X^L} Y^L - (\bar{\nabla}_X Y)^L, V \rangle = 2\langle \tilde{\nabla}_{X^L} Y^L, V \rangle = 2\langle (D_{X^L} Y^L)^\top, \tilde{J}\xi \rangle \\ &= -2\langle \tilde{J}(D_{X^L} Y^L), \xi \rangle = -2\langle D_{X^L} \tilde{J}Y^L, \xi \rangle = 2\langle \tilde{J}Y^L, D_{X^L} \xi \rangle \\ &= -2\langle \tilde{J}Y^L, SX^L \rangle = \frac{2}{r}\langle \tilde{J}Y^L, X^L \rangle = \frac{2}{r}\langle JY, X \rangle.\end{aligned}$$

E, por tanto, a curvatura seccional de  $\bar{M}$  asociada a unha distribución  $J$ -invariante de rango 2, xerada polo sistema ortonormal  $\{X, JX\}$ , é:

$$\bar{K}(X, JX) = \frac{\varepsilon}{r^2} + \frac{3}{r^2}\langle J(JX), X \rangle^2 \langle V, V \rangle = \frac{\varepsilon}{r^2} (1 + 3\langle X, X \rangle^2) = \frac{4\varepsilon}{r^2}.$$

Así pois, podemos concluír que  $\bar{M}$  é un espazo de curvatura seccional holomorfa constante  $c = 4\varepsilon/r^2$  e, dacordo coa Proposición 1.2, o seu tensor de curvatura vén dado pola expresión:

$$\bar{R}_{XY}Z = \frac{c}{4}(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y + \langle JY, Z \rangle JX - \langle JX, Z \rangle JY - 2\langle JX, Y \rangle JZ).$$

A métrica que se definiu no espazo proiettivo complexo  $\mathbb{C}P^n$  denomínase *métrica de Fubini-Study*, mentres que a definida no espazo hiperbólico complexo  $\mathbb{C}H^n$  chámase *métrica de Bergman*.

Por último nesta sección xustificaremos por que  $\mathbb{C}P^n$  e  $\mathbb{C}H^n$  son variedades simplemente conexas e completas. Que  $\mathbb{C}H^n$  é simplemente conexo séguese do feito de ser difeomorfo a unha bóla aberta de  $\mathbb{C}^n$ . Para deducir que  $\mathbb{C}P^n$  é tamén simplemente conexo, podemos botar man da sucesión exacta longa de homotopía aplicada á fibración  $\pi: S^{2n+1}(r) \rightarrow \mathbb{C}P^n$  con fibra  $S^1$ :

$$\dots \longrightarrow \pi_1(S^{2n+1}(r)) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow \pi_0(S^1) \longrightarrow \dots$$

Como  $\pi_1(S^{2n+1}(r))$  e  $\pi_0(S^1)$  son triviais, séguese que  $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$  é tamén trivial.

A completitude de  $\mathbb{C}P^n$  dedúcese da súa compacidade, mentres que a de  $\mathbb{C}H^n$  séguese da completitude do espazo de anti de Sitter (cf. [36], Cap. 4) e de que as submersións semi-riemannianas envían xeodésicas horizontais en xeodésicas (cf. [36], Cap. 7). Non obstante, na próxima sección veremos que  $\mathbb{C}P^n$  e  $\mathbb{C}H^n$  son espazos simétricos, do cal se segue que son completos.

### 1.3.4. $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$ como espazos simétricos

É coñecido que o grupo de matrices que preserva o produto escalar usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$  empregado ó definir  $\mathbb{C}P^n$  é o grupo unitario  $U(n+1)$ , formado por todas aquelas matrices complexas  $A$  tales que a súa inversa  $A^{-1}$  coincide coa súa conxugada trasposta  $A^*$ . Este grupo preserva as rectas complexas pola orixe de  $\mathbb{C}^{n+1}$  e actúa transitivamente nelas. Por tanto,  $U(n+1)$  actúa de xeito transitivo sobre  $\mathbb{C}P^n$ ; se  $A \in U(n+1)$ , a actuación de  $A$  sobre  $p = \pi(z) \in \mathbb{C}P^n$  faise mediante  $A(p) = \pi(Az)$ . Dado que  $U(n+1)$  preserva  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e posto que a métrica sobre  $\mathbb{C}P^n$  se definiu de xeito que  $\pi$  fose unha submersión riemanniana, a acción anterior é por isometrías. Non obstante, todas as transformacións do tipo  $zI$ , onde  $I$  é a matriz identidade e  $|z| = 1$ , actúan trivialmente sobre  $\mathbb{C}P^n$ . Quedámonos entón co subgrupo  $SU(n+1)$ , que sigue actuando transitivamente, pero esta vez con núcleo finito formado polas matrices  $zI$  con  $z$  raíz  $(n+1)$ -ésima da unidade.

*Observación 1.3.* O grupo que actúa de xeito transitivo e efectivo sobre  $\mathbb{C}P^n$  é o cociente de  $U(n+1)$  polo seu centro, formado polas matrices do tipo  $zI$ , con  $|z| = 1$ . Este é, por definición, o grupo unitario (especial) proxectivo  $PU(n+1) = PSU(n+1) = U(n+1)/U(1)$ . Habitualmente, no estudo dos espazos simétricos cométese o abuso de chamar grupo de isometrías do espazo a un grupo de Lie que, se ben non actúa efectivamente sobre o mesmo, o subgrupo dos elementos que actúan trivialmente é finito. Para os nosos propósitos será suficiente, por tanto, traballar co grupo  $SU(n+1)$ .

Temos, por tanto, que  $\mathbb{C}P^n$  é un espazo homoxéneo. Calculemos o subgrupo de isotropía dun punto. Sexa, por exemplo,  $p = \pi(r, 0, \dots, 0) = \pi(re_1) \in \mathbb{C}P^n$ . As matrices  $A \in SU(n+1)$  tales que  $A(p) = \pi(Ae_1) = \pi(re_1) = p$  son as que verifican que  $Ae_1 = \lambda e_1$  para algún  $\lambda \in S^1$ . É dicir, son as que teñen como primeira columna a  $\lambda e_1$ ,  $|\lambda| = 1$ . Por tanto, o subgrupo de isotropía de  $p$  é  $S(U(1) \times U(n)) = S(U(1)U(n))$ , isto é, as matrices de  $U(1) \times U(n) = U(1)U(n)$  con determinante 1. Este grupo é isomorfo a  $U(n)$  mediante a aplicación

$$A \in U(n) \longrightarrow \left( \begin{array}{c|c} \det A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \in S(U(1)U(n)).$$

Así pois, o espazo proxectivo complexo ten a seguinte descrición como espazo homoxéneo:

$$\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1)U(n)).$$

Para probar que  $\mathbb{C}P^n$  é un espazo simétrico chega con atopar unha isometría involutiva en torno a un punto  $p$ , que teña a  $p$  como punto fixo illado. Para o punto  $p = \pi(re_1)$ , tal isometría vén dada pola transformación

$$A = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -I_n \end{array} \right) \in U(1)U(n),$$



posto que  $p = \pi(re_1)$  é o único punto fixo para a actuación de  $A$  sobre  $\mathbb{C}P^n$  no aberto formado polos puntos  $\pi(z)$  con  $z_0 \neq 0$ .

Ademais,  $\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1)U(n))$  é un espazo simétrico hermitiano, dado que admite unha estrutura de variedade complexa tal que  $SU(n+1)$  actúa por transformacións holomorfas. Isto último equivale a que cada transformación de  $SU(n+1)$  verifique as ecuacións de Cauchy-Riemann ou, o que é o mesmo, a que

$$J \circ g_* = g_* \circ J, \quad \text{para todo } g \in SU(n+1).$$

Pero isto séguese de que  $\tilde{J} \circ g_* = g_* \circ \tilde{J}$ , para todo  $g \in SU(n+1)$ , onde agora  $SU(n+1)$  actúa sobre  $\mathbb{C}^{n+1}$  (só estamos dicindo que as transformacións de  $SU(n+1)$  sobre  $\mathbb{C}^{n+1}$  son  $\mathbb{C}$ -lineais).

O caso do espazo hiperbólico complexo é análogo. Agora, o grupo de matrices que preserva a métrica semi-riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sobre  $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\langle z, w \rangle = \operatorname{Re} \left( -z_0 \bar{w}_0 + \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k \right),$$

para  $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$ , é o grupo  $U(1, n)$ , consistente naquelas matrices complexas  $A$  de orde  $n+1$  tales que  $AI_{1,n}A^* = I_{1,n}$ , onde

$$I_{1,n} = \left( \begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right),$$

sendo  $I_n$  a matriz identidade de orde  $n$ . Ó igual ca no caso de  $U(n+1)$ , o grupo  $U(1, n)$  preserva as rectas complexas e intercambia calquera dúas rectas complexas negativas, posto que atopar un elemento de  $U(1, n)$  que envíe  $re_1$  nun  $z \in \mathbb{C}^{n+1}$  arbitrario con  $\langle z, z \rangle = -r^2$  equivale a poder completar  $z/r$  a unha base  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ortonormal, o cal se pode facer polo proceso de Gram-Schmidt aplicado á métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Por tanto,  $U(1, n)$  actúa de xeito transitivo e por isometrías sobre  $\mathbb{C}H^n$ . Ó igual que con  $\mathbb{C}P^n$ , quedámonos co subgrupo  $SU(1, n)$ , que segue actuando de xeito transitivo sobre  $\mathbb{C}H^n$ .

Por tanto,  $\mathbb{C}H^n$  é un espazo homoxéneo. O cálculo do subgrupo de isotropía de  $\pi(re_1)$  é o mesmo ca no caso proxectivo, obtendo tamén  $S(U(1)U(n))$  (que é subgrupo tanto de  $SU(n+1)$  como de  $SU(1, n)$ ). Así pois, obtemos a seguinte descrición do espazo hiperbólico complexo como espazo homoxéneo:

$$\mathbb{C}H^n = SU(1, n)/S(U(1)U(n))$$

A mesma isometría involutiva  $A$  que se considerou no caso proxectivo permítenos tamén concluír que  $\mathbb{C}H^n$  é un espazo simétrico. Ademais, o par  $(G, K) = (SU(1, n), S(U(1)U(n)))$  é un par simétrico, posto que o subgrupo de puntos fixos de  $SU(1, n)$  pola aplicación  $B \rightarrow A \circ B \circ A$  é o propio subgrupo de isotropía  $S(U(1)U(n))$ .

Ademais,  $\mathbb{C}H^n = SU(1, n)/S(U(1)U(n))$  é un espazo simétrico hermitiano, polo mesmo motivo que no caso proxectivo.

Concluimos que  $\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(1)U(n))$  é un espazo simétrico hermitiano de tipo compacto, sendo  $(SU(n+1), S(U(1)U(n)))$  un par simétrico, mentres que  $\mathbb{C}H^n = SU(1, n)/S(U(1)U(n))$  é un espazo simétrico hermitiano de tipo non compacto, sendo tamén  $(SU(1, n), S(U(1)U(n)))$  un par simétrico.

# Capítulo 2

## Descrición de $\mathbb{C}H^n$ como grupo de Lie

Neste capítulo profundizamos na análise de  $\mathbb{C}H^n = SU(1, n)/S(U(1)U(n))$  como espazo simétrico hermitiano. Para iso estudamos a estrutura da álgebra de Lie do grupo de isometrías  $SU(1, n)$ , con vistas a obter un modelo máis sinxelo para o espazo hiperbólico complexo. Este modelo será o dun grupo de Lie resoluble con métrica invariante á esquerda, grupo que nos virá dado pola descomposición de Iwasawa do grupo de isometrías. O obxectivo desta análise será o de, na Sección 2.3, describir certas subvariedades homoxéneas de  $\mathbb{C}H^n$  que aparecerán no resultado principal deste traballo.

Faremos uso de certos conceptos e resultados da teoría de estrutura das álgebras de Lie semisimples e dos espazos simétricos. Libros de referencia neste campo son [23] e [28].

### 2.1. Estrutura do espazo simétrico $\mathbb{C}H^n$

Xa vimos na Sección 1.3.4 que  $\mathbb{C}H^n$  é o espazo simétrico  $SU(1, n)/S(U(1)U(n))$ . De aquí en diante poremos  $G = SU(1, n)$  e  $K = S(U(1)U(n))$ .

Para denotar un certo tipo de matrices que aparecerán a miúdo, establecemos a notación seguinte:

$$[\lambda, v, X] = \left( \begin{array}{c|c} i\lambda & v^* \\ \hline v & X \end{array} \right),$$

sendo  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{C}^n$  e  $X$  unha matriz complexa cadrada de orde  $n$ .

A continuación recordamos as álgebras de Lie que interveñen na descrición de  $\mathbb{C}H^n$  como espazo homoxéneo. A álgebra de Lie de  $U(n)$  é a das matrices anti-hermitianas:

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(n) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X + X^* = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} ia_1 & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ -\bar{z}_{12} & ia_2 & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{z}_{1n} & -\bar{z}_{2n} & \dots & ia_n \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R}, z_{ij} \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

En particular,  $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$ . Polo tanto, a álgebra de Lie de  $S(U(1)U(n))$  é:

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(n)) = \{[\lambda, 0, X] : \lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{u}(n), i\lambda + \operatorname{tr} X = 0\}.$$

Obsérvese que esta álgebra de Lie é isomorfa a  $\mathfrak{u}(n)$ .

Finalmente, a álgebra de Lie de  $SU(1, n)$  é:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, n) &= \{Y \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C}) : YI_{1,n} + I_{1,n}Y^* = 0, \operatorname{tr} Y = 0\} \\ &= \{[\lambda, v, X] : \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{C}^n, X \in \mathfrak{u}(n), i\lambda + \operatorname{tr} X = 0\}. \end{aligned}$$

Sexan  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $v, w \in \mathbb{C}^n$  e  $X, Y \in \mathfrak{u}(n)$ . Tendo que conta que:

$$[\lambda, v, X] [\mu, w, Y] = \left( \begin{array}{c|c} -\lambda\mu + v^*w & i\lambda w^* + v^*Y \\ \hline i\mu v + Xw & vw^* + XY \end{array} \right),$$

obtense a seguinte expresión para o cálculo do corchete da álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(1, n)$ :

$$[[\lambda, v, X], [\mu, w, Y]] = [2 \operatorname{Im} v^*w, i(\mu v - \lambda w) + Xw - Yv, [X, Y] + vw^* - wv^*].$$

A forma de Killing  $B$  de  $\mathfrak{su}(1, n)$  vén dada por

$$B(M, N) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(M) \circ \operatorname{ad}(N)) = 2(n+1) \operatorname{tr} MN, \quad M, N \in \mathfrak{su}(1, n).$$

Xustificamos brevemente esta expresión. É coñecido que a forma de Killing de  $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C})$  vén dada por  $B(M, N) = 2(n+1) \operatorname{tr} MN - 2 \operatorname{tr} M \operatorname{tr} N$ . Posto que a álgebra de Lie das matrices de traza cero,  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$  é un ideal de  $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C})$ , a súa forma de Killing obtense restrinxido a forma de Killing de  $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C})$ , é dicir,  $B(M, N) = 2(n+1) \operatorname{tr} MN$ . Agora ben,  $\mathfrak{su}(1, n)$  é unha forma real da álgebra  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$  (é doado comprobar que a complexificación da primeira dá a segunda), polo cal a forma de Killing de  $\mathfrak{su}(1, n)$  é a restrición da de  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ . Conclúese así a expresión para a forma de Killing de  $\mathfrak{su}(1, n)$ .

Unha *involución de Cartan* dunha álgebra de Lie real semisimple  $\mathfrak{g}$  é un automorfismo  $\theta$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $\theta^2 = \operatorname{id}$  e a forma bilineal non dexenerada  $B_\theta$  definida por

$$B_\theta(X, Y) = -B(\theta X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

é definida positiva.

Consideremos a seguinte aplicación lineal  $\theta: \mathfrak{su}(1, n) \rightarrow \mathfrak{su}(1, n)$  definida por

$$\theta [\lambda, v, X] = -[\lambda, v, X]^* = [\lambda, -v, X].$$

É inmediato que  $\theta^2 = \operatorname{id}$  e mais que  $\theta[M, N] = [\theta M, \theta N]$ . Ademais, a forma bilineal  $B_\theta$  asociada é definida positiva, pois:

$$\begin{aligned} B_\theta([\lambda, v, X], [\mu, w, Y]) &= -B(\theta[\lambda, v, X], [\mu, w, Y]) \\ &= -2(n+1) \operatorname{tr} [\lambda, -v, X] [\mu, w, Y] \\ &= 2(n+1) \left( \lambda\mu + 2 \operatorname{Re} v^*w + \sum_{j=1}^n a_j b_j + 2 \operatorname{Re} \sum_{j \leq k} x_{jk} \bar{y}_{jk} \right), \end{aligned}$$

onde  $X = (x_{jk})$ ,  $Y = (y_{jk})$ ,  $ia_j = x_{jj}$  e  $ib_j = y_{jj}$ , para  $j = 1, \dots, n$ . Polo tanto,  $B_\theta$  é un produto interior en  $\mathfrak{su}(1, n)$  definido positivo, e  $\theta$  é unha involución de Cartan para a álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{su}(1, n)$ . Podemos considerar entón a *descomposición de Cartan* de  $\mathfrak{su}(1, n)$  asociada a  $\theta$ , que non é máis cá descomposición ortogonal (respecto de  $B$  e tamén de  $B_\theta$ )  $\mathfrak{su}(1, n) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  nos autoespazos  $+1$  e  $-1$  de  $\theta$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} &= \{M \in \mathfrak{su}(1, n) : \theta M = M\} = \{[\lambda, 0, X] : \lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{u}(n), i\lambda + \operatorname{tr} X = 0\} \\ &= \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(n)), \\ \mathfrak{p} &= \{M \in \mathfrak{su}(1, n) : \theta M = -M\} = \{[0, v, 0] : v \in \mathbb{C}^n\} \cong \mathbb{C}^n.\end{aligned}$$

É doado comprobar que, ó igual que para calquera outro espazo simétrico, se cumpren as seguintes inclusións:

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}.$$

### 2.1.1. A descomposición en espazos de raíces

Escollamos agora un subespazo abeliano maximal  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ , por exemplo

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R} [0, e_1, 0] = \left\{ \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \hline x & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{array} \right) : x \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R},$$

onde  $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ . Á dimensión de  $\mathfrak{a}$  (que se pode probar independente do subespazo abeliano maximal de  $\mathfrak{p}$  escollido) chámasele *rango* da álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(1, n)$  ou do espazo simétrico  $\mathbb{C}H^n = SU(1, n)/S(U(1)U(n))$ . Comprobemos que os subespazos abelianos de  $\mathfrak{p}$  teñen dimensión 1, para probar a maximalidade de  $\mathfrak{a}$ . Supoñamos que  $\mathfrak{b}$  é un subespazo abeliano de  $\mathfrak{p}$  e tomemos  $[0, v, 0]$  e  $[0, w, 0]$  dous elementos non nulos de  $\mathfrak{b}$ . Tense que  $0 = [[0, v, 0], [0, w, 0]] = [2 \operatorname{Im} v^*w, 0, vv^* - ww^*]$ , co cal  $vv^* - ww^* = 0$  e, entón,  $v_i \bar{w}_j = w_i \bar{v}_j$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Fixemos un  $i$  tal que  $v_i \neq 0$ . Entón, collendo  $i = j$ , temos que  $\frac{w_i}{v_i} = \frac{\bar{w}_i}{\bar{v}_i}$ , é dicir,  $\eta = \frac{w_i}{v_i} \in \mathbb{R}$ . Séguese que, para todo  $j$ ,  $\bar{w}_j = \eta \bar{v}_j$  e, de aquí, que  $w_j = \eta v_j$ , para todo  $j$ . Por tanto,  $w$  e  $v$  son vectores proporcionais, con constante de proporcionalidade real. Por tanto,  $\mathfrak{b}$  ten que ter dimensión (real) 1.

Definamos a seguinte 1-forma  $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ :

$$\alpha \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \hline x & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{array} \right) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

E definamos  $H_\alpha$  como o único elemento de  $\mathfrak{a}$  tal que  $B_\theta(H, H_\alpha) = \alpha(H)$  para todo  $H \in \mathfrak{a}$ ; neste caso

$$H_\alpha = \left[ 0, \frac{1}{4(n+1)}e_1, 0 \right] = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & \frac{1}{4(n+1)} & 0 & \dots & 0 \\ \hline \frac{1}{4(n+1)} & & & & \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right).$$

Consideremos a familia  $\{\text{ad}(H) : H \in \mathfrak{a}\}$  de operadores autoadxuntos de  $\mathfrak{su}(1, n)$  (respecto de  $B_\theta$ ) e que conmutan dous a dous. Polo tanto, tales operadores diagonalizan simultaneamente. Podemos considerar entón os seus autoespazos, chamados *espazos de raíces*: para cada  $\lambda \in \mathfrak{a}^*$  definimos

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, n) : \text{ad}(H)X = \lambda(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Denominaremos *raíz restrinxida* de  $\mathfrak{g}$  a cada elemento  $0 \neq \lambda \in \mathfrak{a}^*$  tal que  $\mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}$ . Denotaremos por  $\Sigma$  o conxunto de todas as raíces restrinxidas de  $\mathfrak{g}$ .

No noso caso temos:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \left\{ \left[ 0, (0, v), \left( \begin{array}{c|c} 0 & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array} \right) \right] : v \in \mathbb{C}^{n-1} \right\} = \left\{ \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & v^* \\ \hline 0 & 0 & v^* \\ v & -v & 0 \end{array} \right) : v \in \mathbb{C}^{n-1} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_{-\alpha} = \theta \mathfrak{g}_\alpha = \left\{ \left[ 0, (0, -v), \left( \begin{array}{c|c} 0 & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array} \right) \right] : v \in \mathbb{C}^{n-1} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_{2\alpha} = \left\{ \left[ \mu, (i\mu, 0), \left( \begin{array}{c|c} -i\mu & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right] : \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left( \begin{array}{c|cc} i\mu & -i\mu & 0 \\ \hline i\mu & -i\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_{-2\alpha} = \theta \mathfrak{g}_{2\alpha} = \left\{ \left[ \mu, (-i\mu, 0), \left( \begin{array}{c|c} -i\mu & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right] : \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= \left\{ \left[ \mu, xe_1, \left( \begin{array}{c|c} i\mu & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array} \right) \right] : \mu, x \in \mathbb{R}, Y \in \mathfrak{u}(n-1), 2i\mu + \text{tr } Y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \left( \begin{array}{c|cc} i\mu & x & 0 \\ \hline x & i\mu & 0 \\ 0 & 0 & Y \end{array} \right) : \mu, x \in \mathbb{R}, Y \in \mathfrak{u}(n-1), 2i\mu + \text{tr } Y = 0 \right\}. \end{aligned}$$

En particular, tense que  $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha} \cong \mathbb{C}^{n-1}$  e  $\mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha} \cong \mathbb{R}$ .

Temos entón a seguinte *descomposición en espazos de raíces* de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, n)$  (que é unha descomposición ortogonal respecto de  $B_\theta$ ):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}.$$

E verifícase que  $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\gamma] \subset \mathfrak{g}_{\beta+\gamma}$  para calquera par  $\beta, \gamma$ .

### 2.1.2. A descomposición de Iwasawa

A continuación presentaremos outra descomposición do grupo de isometrías de  $\mathbb{C}H^n$ ,  $SU(1, n)$ , que vén inducida por unha descomposición da súa álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(1, n)$ . Trátase da descomposición de Iwasawa, que será de grande importancia no que segue.

Escollamos, para iso, unha orde en  $\Sigma$  que faga que  $\alpha$  e  $2\alpha$  sexan raíces positivas e definamos

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} &= \left\{ \left[ \mu, (i\mu, v), \left( \begin{array}{c|c} -i\mu & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array} \right) \right] : \mu \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{C}^{n-1} \right\} \\ &= \left\{ \left( \begin{array}{c|c|c} i\mu & -i\mu & v^* \\ \hline i\mu & -i\mu & v^* \\ \hline v & -v & 0 \end{array} \right) : \mu \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{C}^{n-1} \right\}, \end{aligned}$$

que é una subálgebra nilpotente (pois  $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\gamma] \subset \mathfrak{g}_{\beta+\gamma}$  para calquera par de raíces  $\beta, \gamma$ ) isomorfa á álgebra de Heisenberg de dimensión  $2n - 1$ .

*Observación 2.1.* A álgebra de Heisenberg de dimensión  $2n + 1$ ,  $n \geq 1$  é a subálgebra de Lie  $\mathfrak{h}_n$  de  $\mathfrak{gl}(n + 2, \mathbb{R})$  seguinte:

$$\mathfrak{h}_n = \left\{ \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & a & c \\ \hline 0 & 0 & b \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : a, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pódese definir tamén en termos dos seguintes xeradores:  $p_i$  ( $a = e_i, b = 0, c = 0$ ),  $q_i$  ( $a = 0, b = e_i, c = 0$ ) para  $i = 1, \dots, n$ , e  $z$  ( $a = b = 0, c = 1$ ). As relacións de conmutación son entón:

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij}z, \quad [p_i, z] = 0, \quad [q_i, z] = 0.$$

Un isomorfismo entre  $\mathfrak{h}_{n-1}$  e  $\mathfrak{n}$  pódese conseguir mediante as relacións

$$\begin{aligned} p_j &\rightarrow \left[ 0, (0, e_j), \left( \begin{array}{c|c} 0 & e_j \\ \hline -e_j & 0 \end{array} \right) \right], & q_j &\rightarrow \left[ 0, (0, ie_j), \left( \begin{array}{c|c} 0 & -ie_j \\ \hline -ie_j & 0 \end{array} \right) \right], \\ z &\rightarrow 2 \left[ 1, (i, 0), \left( \begin{array}{c|c} -i & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right]. \end{aligned}$$

*Observación 2.2.* A subálgebra  $\mathfrak{a}$  é claramente abeliana,  $\mathfrak{n}$  é nilpotente e  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  é unha subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$  resoluble. Ademais  $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$ .

Neste punto, podemos presentar a *descomposición de Iwasawa* da álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, n)$  (respecto da escolla do subespazo abeliano maximal  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{p}$  e da orde en  $\Sigma$ ), que é:

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(1, n) &= \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \\ &= \left\{ \left( \begin{array}{c|ccc} i\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & X & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) : \lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{u}(n), i\lambda + \text{tr } X = 0 \right\} \\ &\quad \oplus \left\{ \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & y & 0 & \dots & 0 \\ \hline y & & & & \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) : y \in \mathbb{R} \right\} \\ &\quad \oplus \left\{ \left( \begin{array}{c|cc|c} i\mu & -i\mu & & v^* \\ \hline i\mu & -i\mu & & v^* \\ \hline v & -v & & 0 \end{array} \right) : \mu \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{C}^{n-1} \right\}. \end{aligned}$$

*Observación 2.3.* Aínda que  $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{n}$  son subálgebras de  $\mathfrak{g}$ , a descomposición de Iwasawa é tan só unha descomposición en suma directa de subespazos vectoriais de  $\mathfrak{g}$ , e non en suma directa de álgebras de Lie (pois, por exemplo,  $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \neq 0$ ). Ademais, a descomposición tampouco é ortogonal (nin respecto de  $B$  nin respecto de  $B_\theta$ ): tense que  $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{k}$ ,  $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{n}$  pero  $\mathfrak{k} \not\perp \mathfrak{n}$ .

Sexan agora  $A$  e  $N$  os subgrupos conexos de  $G = SU(1, n)$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{n}$ , respectivamente. Entón  $AN = \{an \in G : a \in A, n \in N\}$  é un subgrupo de  $G$ . Comprobemos isto. Sexan  $a, b \in A$  e  $n, m \in N$ ; entón  $anbm = ab(b^{-1}nb)m$  e  $(an)^{-1} = n^{-1}a^{-1} = a^{-1}(an^{-1}a^{-1})$ . Por tanto, chega con probar que  $\varphi_a(n) \in N$  para todo  $a \in A$  e  $n \in N$ , sendo  $\varphi_a$  a conxugación por  $a$ . Tomemos  $n \in N$  e  $a \in A$  nun entorno do neutro para o cal  $\text{Exp}$  sexa un difeomorfismo (en realidade, como  $N$  e  $A$  son nilpotentes, esta restrición é superflua). Pondo entón  $n = \text{Exp}(H)$  e  $a = \text{Exp}(C)$  con  $H \in \mathfrak{n}$  e  $C \in \mathfrak{a}$ , temos que  $\varphi_a(n) = \varphi_a(\text{Exp}(H)) = \text{Exp}(\text{Ad}(a)H) \in N$  posto que  $\text{ad}(C)\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}$  e, entón,  $\text{Ad}(a)H = \text{Ad}(\text{Exp}(C))H = e^{\text{ad}(C)}H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\text{ad}(C))^n H \in \mathfrak{n}$ . Para elementos arbitrarios  $n \in N$  e  $a \in A$ , que  $\varphi_a(n) \in N$  séguese do feito de que un entorno do neutro dun grupo de Lie conexo xera todo o grupo.

O subgrupo  $AN$  é entón un subgrupo conexo de  $G$ . É ademais o menor subgrupo de  $G$  que contén a  $A$  e a  $N$ . É doado tamén comprobar que a súa álgebra de Lie é  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  (a álgebra de Lie de  $AN$  contén a  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ , pero coinciden porque as dimensións son as



mesmas). O teorema da descomposición de Iwasawa a nivel de grupos de Lie asegúranos que a aplicación produto

$$\begin{aligned} K \times A \times N &\longrightarrow G \\ (k, a, n) &\longmapsto kan, \end{aligned}$$

é un difeomorfismo, e que  $A$ ,  $N$  e, por tanto,  $AN$  son simplemente conexos. Hai que notar de novo que a descomposición anterior dános un produto de variedades diferenciáveis, non un produto directo de grupos de Lie.

Ademais, por ser  $A$  e  $N$  nilpotentes ( $A$  abeliano, de feito) e simplemente conexos, as aplicacións exponencial de  $A$  e  $N$ ,  $\text{Exp}|_{\mathfrak{a}}: \mathfrak{a} \rightarrow A$  e  $\text{Exp}|_{\mathfrak{n}}: \mathfrak{n} \rightarrow N$  respectivamente, son difeomorfismos (cf. [28], Teorema 1.127). A aplicación exponencial do subgrupo  $AN$ ,  $\text{Exp}|_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}}: \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow AN$ , é tamén un difeomorfismo. Isto séguese da caracterización seguinte (cf. [37], Teorema 6.4): para un grupo de Lie simplemente conexo, que a súa exponencial sexa un difeomorfismo equivale a que para todo  $X$  na súa álgebra de Lie,  $\text{ad}(X)$  non teña autovalores imaxinarios non nulos. Aquí o grupo é  $AN$  e a súa álgebra de Lie  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ , pero pódese atopar unha base de  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  na cal as matrices asociadas ós elementos de  $\text{ad}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$  sexan triangulares superiores con entradas reais na diagonal (véxase [28], Lema 6.45: simplemente se trata de fixar unha base ortonormal da álgebra de Lie, adaptada á descomposición en espazos de raíces dun modo conveniente). Disto séguese que os autovalores de cada  $\text{ad}(X)$ , con  $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ , son reais. Unha álgebra de Lie (como  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ ) resoluble e tal que os autovalores de todos os  $\text{ad}(X)$  son reais dise completamente resoluble ou, en inglés, “*split solvable*”.

*Observación 2.4.* Para unha demostración alternativa do feito de que  $\text{Exp}|_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}}: \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow AN$  é un difeomorfismo, véxase [12], Sección 4.1.4, onde se calcula explicitamente esa exponencial en termos da exponencial de  $\mathfrak{n}$ . Hai que sinalar, non obstante, que a argumentación en [12] só é válida para os denominados espazos de Damek-Ricci, mentres que o razoamento que expuxemos arriba esténdese ó caso dos espazos simétricos de tipo non compacto.

### 2.1.3. O modelo do grupo de Lie resoluble $AN$

Neste apartado veremos como podemos identificar o espazo hiperbólico complexo co grupo de Lie resoluble  $AN$  dado pola descomposición de Iwasawa da subsección anterior. Ademais, transferiremos a estrutura riemanniana de  $\mathbb{C}H^n$  a este grupo, de xeito que  $AN$  será un grupo de Lie con métrica invariante á esquerda. Dotarémolo tamén da estrutura complexa inducida e, finalmente, escribiremos o corchete de Lie, a conexión de Levi-Civita e o tensor de curvatura do grupo de Lie  $AN$ .

O subgrupo  $AN$  de  $G = SU(1, n)$  actúa simple e transitivamente sobre  $\mathbb{C}H^n = G/K = SU(1, n)/S(U(1)U(n))$ . Para comprobalo consideremos a acción transitiva de  $G$  sobre  $\mathbb{C}H^n$  por isometrías e poñamos  $o = K \in G/K$  un punto de  $\mathbb{C}H^n$  con grupo de isotropía  $K$  (dacordo co feito na Sección 1.3.4,  $o = \pi(re_1)$ ). Sexa  $p$  un punto calquera de  $\mathbb{C}H^n$  e sexan  $k' \in K$  e  $h' \in AN$  tales que  $k'h'(o) = p$ . Que exista un  $h \in AN$  tal que  $h(o) = p$  equivale a que existan  $h \in AN$  e  $k \in K$  tales que  $k'h' = hk$ , ou, o que é o mesmo,  $k^{-1}h^{-1} = h'^{-1}k'^{-1}$ . Pero a existencia de  $h$  e  $k$  garantízanola o teorema de descomposición de Iwasawa. Por tanto  $AN$  actúa sobre  $\mathbb{C}H^n$  de xeito transitivo. Agora, se  $h \in AN$  cumpre que  $h(o) = o$ ,

entón  $h \in K$ , co cal  $h$  é o elemento neutro de  $G$ , por estar en  $K \cap AN$ . Así pois,  $AN$  actúa de xeito simple e transitivo sobre  $\mathbb{C}H^n$ .

Sexa, de novo,  $o \in \mathbb{C}H^n$  o punto con subgrupo de isotropía  $K = S(U(1)U(n))$ , é dicir, baixo a identificación  $\mathbb{C}H^n = SU(1, n)/S(U(1)U(n))$ ,  $o = S(U(1)U(n))$ . Definamos a aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \phi: G &\longrightarrow \mathbb{C}H^n \\ h &\longmapsto h(o). \end{aligned}$$

Dado que  $\ker \phi_{*I} = \mathfrak{k} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(n))$ , podemos identificar  $T_o\mathbb{C}H^n$  con  $\mathfrak{p}$  vía  $\phi_{*I}$ . A métrica de Bergman  $g$  en  $\mathbb{C}H^n$  (mellor dito, a súa restrición  $g_o$  a  $T_o\mathbb{C}H^n$ ) induce unha métrica  $\phi^*g_o$  en  $\mathfrak{p}$  mediante  $\phi_{*I|_{\mathfrak{p}}}: \mathfrak{p} \rightarrow T_o\mathbb{C}H^n$ .

A representación de isotropía de  $\mathbb{C}H^n = G/K$ ,

$$\begin{aligned} K \times \mathfrak{p} &\longrightarrow \mathfrak{p} \\ (k, [0, v, 0]) &\longmapsto \text{Ad}(k) [0, v, 0] = k [0, v, 0] k^{-1}, \end{aligned}$$

ten por órbitas as esferas centradas na orixe de  $\mathfrak{p} \equiv \mathbb{C}^n$  pois é equivalente á actuación de  $U(n)$  sobre  $\mathbb{C}^n$ . Por tanto, trátase dunha representación irreducible, polo que o espazo simétrico  $\mathbb{C}H^n = G/K$  é irreducible. A Proposición 2.5 permítenos entón asegurar que o produto interior  $\phi^*g_o$  sobre  $\mathfrak{p}$  é un múltiplo real positivo da forma de Killing  $B$  restrinxida a  $\mathfrak{p}$  ou, equivalentemente, de  $B_{\theta|_{\mathfrak{p}}}$ .

**Proposición 2.5.** *Sexa  $(G, K)$  un par simétrico riemanniano tal que  $G/K$  é irreducible. Entón, restrinxíndose ó subespazo  $\mathfrak{p}$ , todo produto interior  $G$ -invariante  $g$  sobre o espazo simétrico  $G/K$  é un múltiplo real da forma de Killing  $B$  de  $G$ .*

*Ademais, este múltiplo é positivo ou negativo segundo sexa  $B|_{\mathfrak{p}}$  definido positivo ou definido negativo, respectivamente.*

*Demostración.* Que  $G/K$  sexa un espazo simétrico irreducible implica que a súa representación de isotropía

$$\begin{aligned} K \times \mathfrak{p} &\longrightarrow \mathfrak{p} \\ (k, \xi) &\longmapsto k_*\xi = \text{Ad}(k)\xi \end{aligned}$$

é irreducible.

Sexa  $g$  un produto interior  $G$ -invariante sobre  $G/K$ . Dacordo coa expresión da representación de isotropía, isto implica en particular que  $g$  é  $\text{Ad}(K)$ -invariante:

$$g(\text{Ad}(k)\xi, \text{Ad}(k)\eta) = g(\xi, \eta), \quad \text{para todo } k \in K \text{ e todo } \xi, \eta \in \mathfrak{p}.$$

Definamos  $\Phi \in \text{End}(\mathfrak{p})$  a través de

$$B(\Phi\xi, \eta) = g(\xi, \eta), \quad \xi, \eta \in \mathfrak{p}.$$

Sexa  $\lambda$  un autovalor de  $\Phi$ . Vexamos que  $\ker(\Phi - \lambda I)$  é  $\text{Ad}(K)$ -invariante. Para iso, sexa  $\xi \in \ker(\Phi - \lambda I)$  e consideremos  $\eta \in \mathfrak{p}$  e  $k \in K$  arbitrarios. Entón, tendo en conta que  $g$  e  $B$  son  $\text{Ad}(K)$ -invariantes, temos que:

$$\begin{aligned} B(\Phi \text{Ad}(k)\xi, \eta) &= g(\text{Ad}(k)\xi, \eta) = g(\xi, \text{Ad}(k^{-1})\eta) = B(\Phi\xi, \text{Ad}(k^{-1})\eta) \\ &= \lambda B(\xi, \text{Ad}(k^{-1})\eta) = \lambda B(\text{Ad}(k)\xi, \eta) = B(\lambda \text{Ad}(k)\xi, \eta), \end{aligned}$$

de onde se deduce que  $\Phi \text{Ad}(k)\xi = \lambda \text{Ad}(k)\xi$ , para todo  $k \in K$  e  $\xi \in \ker(\Phi - \lambda I)$ . Por tanto, o subespazo  $\ker(\Phi - \lambda I)$  de  $\mathfrak{p}$  é  $\text{Ad}(K)$ -invariante e, como a representación de isotropía  $K \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$  é irreducible, séguese que  $\ker(\Phi - \lambda I) = \mathfrak{p}$ , co cal  $g = \lambda B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$ .

A última afirmación do enunciado é consecuencia directa de que  $g$  é un produto interior definido positivo.  $\square$

Podemos considerar, por tanto, a única constante  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c < 0$ , tal que

$$\phi^* g_o = -\frac{1}{c(n+1)} B_\theta \quad \text{sobre } \mathfrak{p}.$$

O feito de considerar esta constante  $c$  e non outra quedará claro máis adiante.

Dado que  $AN$  actúa de xeito simple e transitivo sobre  $\mathbb{C}H^n$ , a aplicación  $\phi|_{AN}: AN \rightarrow \mathbb{C}H^n$  é un difeomorfismo. Polo tanto, as variedades de Riemann  $(AN, \phi^*g)$  e  $(\mathbb{C}H^n, g)$  son isométricas. Dado que a métrica  $g$  en  $\mathbb{C}H^n$  é invariante por isometrías, séguese que

$$L_h^*(\phi^*g) = L_h^*\phi^*(h^{-1})^*g = (h^{-1} \circ \phi \circ L_h)^*g = \phi^*g, \quad \text{para todo } h \in G,$$

pois  $h^{-1} \circ \phi \circ L_h(h') = h^{-1}(hh'(o)) = h'(o) = \phi(h')$  para todo  $h' \in G$ , e onde denotamos por  $L_h$  a multiplicación por  $h$  pola esquerda nun grupo de Lie. Así pois, a métrica  $\phi^*g$  sobre  $AN$  é invariante á esquerda. Denotemos esta métrica por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Por tanto,  $(AN, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é un grupo de Lie con métrica invariante á esquerda.

A partir de agora poderemos pensar a variedade de Kähler  $\mathbb{C}H^n$  como o grupo de Lie resoluble  $AN$  coa métrica invariante á esquerda  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Esta identificación permitiranos reescribir a métrica, a estrutura case complexa, os corchetes e a conexión de  $\mathbb{C}H^n \equiv AN$  en termos da álgebra de Lie  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ .

A continuación, se como subíndice dun campo invariante pomos un subespazo vectorial de  $\mathfrak{g}$ , significará que tomamos a proxección dese campo sobre tal subespazo. Sexan  $X, Y \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \cong T_I(AN)$  dous campos invariantes á esquerda. Entón:

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \phi^*g_o(X_{\mathfrak{k}} + X_{\mathfrak{p}}, Y_{\mathfrak{k}} + Y_{\mathfrak{p}}) = g_o(\phi_*X_{\mathfrak{p}}, \phi_*Y_{\mathfrak{p}}) = -\frac{1}{c(n+1)} B_\theta(X_{\mathfrak{p}}, Y_{\mathfrak{p}}) \\ &= -\frac{1}{c(n+1)} B_\theta \left( \frac{1-\theta}{2} X, \frac{1-\theta}{2} Y \right) \\ &= -\frac{1}{4c(n+1)} B_\theta(X_{\mathfrak{a}} + X_{\mathfrak{n}} - \theta X_{\mathfrak{a}} - \theta X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{a}} + Y_{\mathfrak{n}} - \theta Y_{\mathfrak{a}} - \theta Y_{\mathfrak{n}}) \\ &= -\frac{1}{4c(n+1)} B_\theta(2X_{\mathfrak{a}} + X_{\mathfrak{n}} - \theta X_{\mathfrak{n}}, 2Y_{\mathfrak{a}} + Y_{\mathfrak{n}} - \theta Y_{\mathfrak{n}}) \\ &= -\frac{1}{c(n+1)} \left( B_\theta(X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}}) + \frac{1}{4} B_\theta(X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}}) + \frac{1}{4} B_\theta(\theta X_{\mathfrak{n}}, \theta Y_{\mathfrak{n}}) \right) \\ &= -\frac{1}{c(n+1)} \left( B_\theta(X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}}) + \frac{1}{2} B_\theta(X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}}) \right), \end{aligned}$$

onde se tivo en conta que  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ , que  $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{n} \perp \theta \mathfrak{n}$  e  $\mathfrak{a} \perp \theta \mathfrak{n}$  (pola descomposición en espazos de raíces) e que  $\theta$  é un automorfismo de  $\mathfrak{g}$ .

A fórmula que vimos de deducir para  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e a expresión que temos para  $B_\theta$  permítenos calcular en termos matriciais o produto interior de dous elementos de  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \left[ b, (a + ib, v), \left( \begin{array}{c|c} -ib & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array} \right) \right], \left[ d, (c + id, w), \left( \begin{array}{c|c} -id & w^* \\ \hline -w & 0 \end{array} \right) \right] \right\rangle \\ = -\frac{4}{c} (ac + bd + \operatorname{Re} v^* w) = -\frac{4}{c} \langle (a + ib, v), (c + id, w) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}, \end{aligned}$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$  denota o produto escalar usual en  $\mathbb{R}^{2n}$ , definido por  $\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \operatorname{Re}(u_1^* u_2)$  se  $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^n$  e onde puxemos  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $v, w \in \mathbb{C}^{n-1}$ .

A seguinte notación, para referirnos ós elementos de  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ , simplificará as contas no que segue:

$$[x + iy, v] = \left[ y, (x + iy, v), \left( \begin{array}{c|c} -iy & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array} \right) \right], \quad x, y \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

Analicemos agora a estrutura case complexa inducida sobre  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . O grupo de Lie  $AN$  pódese dotar dunha estrutura de variedade complexa (é máis, de variedade de Kähler) mediante a identificación que estamos considerando entre  $AN$  e  $\mathbb{C}H^n$  por  $\phi|_{AN}$ . Podemos entón describir a estrutura case complexa  $J$  que induce, sobre  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ , a estrutura case complexa de  $\mathbb{C}H^n$  (que tamén denotamos por  $J$ ). Para iso, sexa  $X = [x + iy, v] \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . Dacordo coas eleccións feitas (véxase a Sección 1.3.4), temos  $o = \pi(re_1)$ , onde  $\pi: H_1^{2n+1}(r) \rightarrow \mathbb{C}H^n$  é a proxección usual do espazo de anti De Sitter sobre o espazo hiperbólico complexo. O vector de  $T_o\mathbb{C}H^n$  que lle corresponde a  $\frac{1}{r}X$  é entón

$$\frac{1}{r}\phi_*(X) = \pi_* \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{Exp}(tX)e_1 \right) = \pi_*(Xe_1) = \pi_*(iy, x + iy, v) = \pi_*(0, x + iy, v),$$

posto que  $t \mapsto \pi(r \operatorname{Exp}(tX)e_1)$  é a curva integral en  $\mathbb{C}H^n$  pasando por  $o$  do campo de vectores fundamental asociado a  $X$ . Tamén se tivo en conta que  $ie_1$  é un vector tanxente á fibra de  $\pi$  no punto  $re_1$ , polo cal  $\pi_*(ie_1) = 0$ . Por como se definiu a estrutura complexa  $J$  de  $\mathbb{C}H^n$ , tense que

$$\frac{1}{r}J\phi_*(X) = J\pi_*(Xe_1) = \pi_* \left( \tilde{J}(Xe_1)_{V^\perp} \right) = \pi_*(i(0, x + iy, v)) = \pi_*(0, -y + ix, iv),$$

onde  $\tilde{J}$  denotaba a estrutura complexa de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , é dicir, multiplicar as coordenadas por  $i$ , e onde  $(\cdot)_{V^\perp}$  denota a proxección sobre a distribución horizontal de  $H_1^{2n+1}(r)$ . Razoando de xeito similar a como fixemos antes con  $X$ , dedúcese que atopar o elemento de  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  que lle corresponde a  $J\phi_*(X) = r\pi_*(0, -y + ix, iv) \in T_o\mathbb{C}H^n$  mediante o isomorfismo  $(\phi|_{AN})_*: \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow T_o\mathbb{C}H^n$  significa encontrar unha matriz  $Y$  de  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  tal que  $\pi_*(Ye_1) = \pi_*(0, -y + ix, iv)$ . Pero isto implica que  $Y = [-y + ix, iv]$ . Así pois, a estrutura complexa  $J$  sobre  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  vén dada por:

$$J[x + iy, v] = [i(x + iy, v)].$$

Hai que notar que se cumpre que  $J\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{2\alpha}$  e que  $\mathfrak{g}_\alpha$  é  $J$ -invariante.

*Observación 2.6.* Do Teorema 7.117 en [28] dedúcese que, dada calquera estrutura complexa  $J$  sobre  $G/K$  que convirta esta variedade de Riemann nun espazo simétrico hermitiano, a aplicación inducida  $J: \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$  é da forma  $J = (\text{ad}(X_0))|_{\mathfrak{p}}$ , para algún  $X_0$  no centro de  $\mathfrak{k}$ . É doado comprobar que o centro de  $\mathfrak{k}$  está formado polos elementos  $X = [n\lambda, 0, -i\lambda I_n]$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Poñamos  $X_0 = [n\lambda_0, 0, -i\lambda_0 I_n]$ , con  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ . Se  $Y = [0, v, 0] \in \mathfrak{p}$ , entón  $\text{ad}(X_0)Y = [0, -(n+1)i\lambda_0 v, 0]$ . Posto que  $J^2 = -\text{id}$ , tense que  $-(n+1)^2\lambda_0^2 = -1$ , de onde se segue que a estrutura complexa  $J$  é única salvo orientación.

Reescribimos a continuación na nova notación algunhas das fórmulas obtidas ata o de agora:

$$\begin{aligned} J[x + iy, v] &= [i(x + iy, v)], \\ \langle [x + iy, v], [a + ib, w] \rangle &= -\frac{4}{c} \langle (x + iy, v), (a + ib, w) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}, \\ [[x + iy, v], [a + ib, w]] &= [2i \langle i(x + iy, v), (a + ib, w) \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}, -av + xw]. \end{aligned}$$

Podemos calcular agora a conexión de Levi-Civita  $\bar{\nabla}$  para campos de vectores invariantes á esquerda en  $AN$ . Para iso, poñamos  $X = [x + iy, v]$ ,  $Y = [z + it, w]$  e  $Z = [a + ib, u]$  e apliquemos a fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2\langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle &= \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \\ &= \langle [[x + iy, v], [z + it, w]], [a + ib, u] \rangle \\ &\quad - \langle [[z + it, w], [a + ib, u]], [x + iy, v] \rangle \\ &\quad + \langle [[a + ib, u], [x + iy, v]], [z + it, w] \rangle \\ &= \langle [4ty + 2\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}} + i(-4yz + 2\langle iv, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}}), -2zv - 2yiw - 2tiv], [a + ib, u] \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\bar{\nabla}_{[x+iy, v]} [z + it, w] = [2ty + \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}} + i(-2yz + \langle iv, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}}), -zv - yiw - tiv].$$

Definamos agora os campos unitarios seguintes:

$$\begin{aligned} B &= 2(n+1)\sqrt{-c}H_\alpha = \left[ 0, \frac{\sqrt{-c}}{2}e_1, 0 \right] = \left[ \frac{\sqrt{-c}}{2}, 0 \right], \\ Z &= JB = \left[ \frac{i\sqrt{-c}}{2}, 0 \right]. \end{aligned}$$

Ademais tense que  $\mathfrak{a} = \mathbb{R}B$  e  $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \mathbb{R}Z$ .

Observando que  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{R}Z$ , se tomamos  $U, V \in \mathfrak{g}_\alpha$ , obtemos a seguinte reformulación da conexión de Levi-Civita de  $AN$ :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{aB+U+xZ}(bB + V + yZ) &= \sqrt{-c} \left\{ \left( xy + \frac{1}{2}\langle U, V \rangle \right) B - \frac{1}{2}(bU + yJU + xJV) \right. \\ &\quad \left. + \left( -bx + \frac{1}{2}\langle JU, V \rangle \right) Z \right\}. \end{aligned}$$

Para comprobar esta fórmula, poñamos  $U = [0, v]$  e  $V = [0, w]$ . Entón:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_B B &= \bar{\nabla}_B V = \bar{\nabla}_B Z = 0, \\
\bar{\nabla}_U B &= \bar{\nabla}_{[0, v]} \left[ \frac{\sqrt{-c}}{2}, 0 \right] = \left[ 0, -\frac{\sqrt{-c}}{2}v \right] = -\frac{\sqrt{-c}}{2}U, \\
\bar{\nabla}_U V &= \bar{\nabla}_{[0, v]} [0, w] = [\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}} + i\langle iv, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}}, 0] \\
&= [\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}}, 0] + J[\langle iv, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}}, 0] \\
&= \frac{2}{\sqrt{-c}}\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}}B + \frac{2}{\sqrt{-c}}\langle iv, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}}JB \\
&= \frac{\sqrt{-c}}{2}\langle U, V \rangle B + \frac{\sqrt{-c}}{2}\langle JU, V \rangle Z, \\
\bar{\nabla}_U Z &= \bar{\nabla}_{[0, v]} \left[ \frac{i\sqrt{-c}}{2}, 0 \right] = \left[ 0, -\frac{i\sqrt{-c}}{2}v \right] = -\frac{\sqrt{-c}}{2}JU, \\
\bar{\nabla}_Z B &= \bar{\nabla}_{\left[\frac{i\sqrt{-c}}{2}, 0\right]} \left[ \frac{\sqrt{-c}}{2}, 0 \right] = \left[ \frac{ic}{2}, 0 \right] = -\sqrt{-c}Z, \\
\bar{\nabla}_Z V &= \bar{\nabla}_{\left[\frac{i\sqrt{-c}}{2}, 0\right]} [0, w] = \left[ 0, -\frac{i\sqrt{-c}}{2}w \right] = -\frac{\sqrt{-c}}{2}J[0, w] = -\frac{\sqrt{-c}}{2}JV, \\
\bar{\nabla}_Z Z &= \bar{\nabla}_{\left[\frac{i\sqrt{-c}}{2}, 0\right]} \left[ \frac{i\sqrt{-c}}{2}, 0 \right] = \left[ -\frac{c}{2}, 0 \right] = \sqrt{-c}B.
\end{aligned}$$

Ademais, coas mesmas notacións, é doado comprobar que se teñen as seguintes relacións para os corchetes:

$$[B, Z] = \sqrt{-c}Z, \quad [B, U] = \frac{\sqrt{-c}}{2}U, \quad [U, V] = \sqrt{-c}\langle JU, V \rangle Z, \quad [Z, U] = 0.$$

Podemos agora, empregando a descripción con grupos e álxebras de Lie que desenvolvemos, calcular o tensor de curvatura  $\bar{R}$  de  $\mathbb{C}H^n = SU(1, n)/S(U(1)U(n))$ , simplemente aplicando a definición de tensor de curvatura dunha variedade de Riemann. Sabemos que a métrica de Bergman  $g$  que temos en  $\mathbb{C}H^n$  dota a este espazo de curvatura seccional holomorfa constante; é dicir, se  $X, Y, V$  son campos de vectores sobre  $\mathbb{C}H^n$ , o campo  $\bar{R}_{XY}V$  é un múltiplo negativo constante do campo

$$\frac{1}{4}(\langle Y, V \rangle X - \langle X, V \rangle Y + \langle JY, V \rangle JX - \langle JX, V \rangle JY - 2\langle JX, Y \rangle JV),$$

onde tal constante é a curvatura seccional de calquera plano  $J$ -invariante. Se tomamos, por exemplo,  $X = B$  e  $Y = V = Z$ , este campo é  $B$ . Por outra parte, usando as relacións para a conexión e para o corchete que deducimos arriba, temos que

$$\bar{R}_{BZ}Z = \bar{\nabla}_B \bar{\nabla}_Z Z - \bar{\nabla}_Z \bar{\nabla}_B Z - \bar{\nabla}_{[B, Z]}Z = cB.$$

Por tanto, a curvatura seccional holomorfa constante de  $\mathbb{C}H^n$  é  $c$ .

## 2.2. Interpretación xeométrica da descomposición de Iwasawa

A continuación expomos brevemente o significado xeométrico das álxebras e grupos de Lie da descomposición de Iwasawa. Para profundizar nos conceptos e propiedades que mencionaremos a continuación pódese consultar [18].

Dúas curvas  $\gamma$  e  $\sigma$  parametrizadas por arco nunha variedade simplemente conexa, completa con curvatura non positiva  $\bar{M}$  dinse *asintóticas* se existe unha constante positiva  $C$  tal que  $\bar{d}(\gamma(t), \sigma(t)) \leq C$  para todo  $t \geq 0$ , onde  $\bar{d}$  denota a distancia riemanniana en  $\bar{M}$ . Esta definición establece unha relación de equivalencia na familia das xeodésicas completas de  $\bar{M}$ . A cada clase de equivalencia chámasele *punto do infinito*. O conxunto de puntos do infinito de  $\bar{M}$  denomínase *fronteira ideal* e denótase por  $\bar{M}(\infty)$ . No noso caso,  $\bar{M} = \mathbb{C}H^n$ , polo que denotaremos por  $\mathbb{C}H^n(\infty)$  a fronteira ideal de  $\mathbb{C}H^n$ .

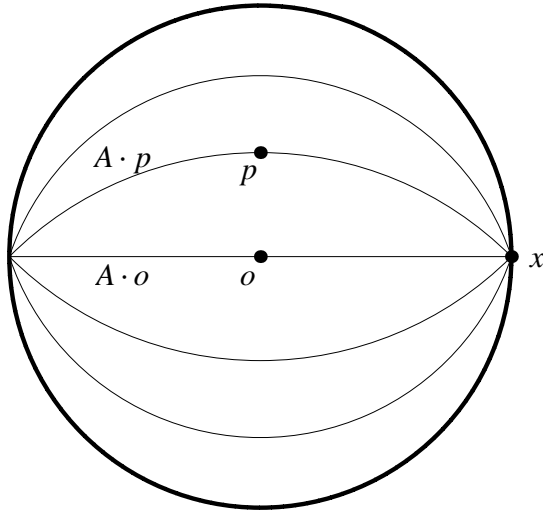
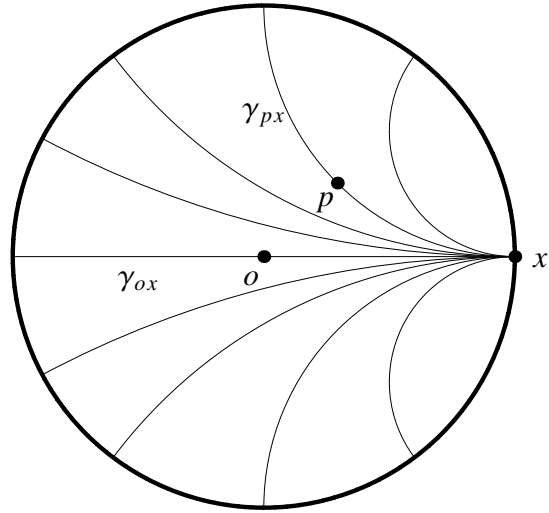
É posible dotar a  $\mathbb{C}H^n \cup \mathbb{C}H^n(\infty)$  dunha boa topoloxía que fai que  $\mathbb{C}H^n \cup \mathbb{C}H^n(\infty)$  sexa homeomorfo á bóla unidade pechada no espazo euclidiano  $\mathbb{R}^{2n}$ , onde  $\mathbb{C}H^n(\infty)$  se corresponde coa esfera unidade de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Esta topoloxía chámase *topoloxía cono*. Para o que segue é posible que sexa conveniente visualizar  $\mathbb{C}H^n$  como a bóla unidade aberta de  $\mathbb{R}^{2n}$  e  $\mathbb{C}H^n(\infty)$  como a súa fronteira (a esfera unidade); así, dúas xeodésicas serán asymptóticas se converxen ó mesmo punto da esfera unidade.

Pódese probar que para cada  $p \in \mathbb{C}H^n$  e cada  $x \in \mathbb{C}H^n(\infty)$  existe unha única xeodésica  $\gamma_{px}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}H^n$  tal que  $\|\dot{\gamma}_{px}\| = 1$ ,  $\gamma_{px}(0) = p$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_{px}(t) = x$ .

Xa sabemos que o grupo  $K$  da descomposición de Iwasawa é o subgrupo de isotropía dun certo punto  $o \in \mathbb{C}H^n$ . Sabemos tamén que podemos identificar o grupo  $AN$  co espazo hiperbólico complexo. Interésanos investigar, por tanto, que subconxuntos de  $\mathbb{C}H^n$  se corresponden cos subgrupos  $A$  e  $N$  ou, equivalentemente, cales son as órbitas por  $o$  de  $A$  e de  $N$ . Veremos tamén como son os campos de vectores invariantes á esquerda dados polos elementos das súas álxebras de Lie,  $\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{n}$ .

Sabemos que podemos identificar  $\mathfrak{p}$  co tanxente en  $o$ ,  $T_o\mathbb{C}H^n$ . A subálgebra de Lie  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  é un subespazo abeliano unidimensional de  $\mathfrak{p}$ . En  $\mathfrak{p} \equiv T_o\mathbb{C}H^n$  a exponencial riemanniana e a exponencial de grupos de Lie coinciden, é dicir,  $\text{Exp}(tX) \cdot o = \exp_o(tX)$  para todo  $X \in \mathfrak{p}$  e  $t \in \mathbb{R}$  (Teorema 3.3, Cap. IV, en [23]). Disto séguese que a órbita do grupo  $A$  por  $o$  coincide coa xeodésica determinada por  $o$  e  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \equiv T_o\mathbb{C}H^n$ . É dicir,  $A$  pódese identificar cunha xeodésica completa con velocidade un pasando por  $o$ . Sexa  $x$  o seu punto do infinito asociado, co cal  $A \equiv \gamma_{ox}(\mathbb{R})$ . É dicir,  $\gamma_{ox}(\mathbb{R})$  é a órbita  $A \cdot o$  por  $o$  da acción de  $A$  sobre  $\mathbb{C}H^n$ , mentres que, debido a que  $A$  actúa por isometrías, o resto das órbitas son curvas equidistantes e asymptóticas a  $A \cdot o$  (Figura 2.1). De feito todas estas órbitas teñen os mesmos dous puntos do infinito: un é  $x$  e o outro (chamémoslle  $y$ ) é o determinado pola xeodésica  $\gamma_{ox}$  recorrida en sentido inverso.

*Observación 2.7.* O rango da álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, n)$  é a dimensión dun subespazo abeliano maximal de  $\mathfrak{p}$ ; neste caso, a dimensión de  $\mathfrak{a}$  é un. Este valor correspóndese coa maior dimensión dunha subvariedade totalmente xeodésica e chá do espazo simétrico  $\mathbb{C}H^n$ . Esta correspondencia xeneralízase a calquera espazo simétrico (cf. [23], Cap. V, Sección 6).

Figura 2.1: Órbitas da acción de  $A$ .Figura 2.2: Curvas integrais de  $B \in \mathfrak{a}$ .

A partir de agora centrarémonos en buscar un significado á acción de  $N$  e en estudar as propiedades das curvas integrais do campo  $B \in \mathfrak{a}$  definido na sección anterior. Como se verá, estas dúas análises están moi relacionadas entre si. Antes de nada, nótese que a subálgebra  $\mathfrak{n}$  ten dimensión  $2n - 1$ , polo cal o subgrupo asociado  $N$  actúa sobre  $\mathbb{C}H^n$  con cohomoxeneidade un, e recórdese que o campo unitario  $B$  xera a subálgebra  $\mathfrak{a}$ .

Un primeiro paso para buscar información sobre as órbitas da acción de  $N$  é introducir o concepto de campo de vectores fundamental. Supoñamos que un grupo de Lie  $H$  (con álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$ ) actúa por isometrías sobre unha variedade de Riemann completa  $M$ . Para cada  $X \in \mathfrak{h}$ , definimos o *campo de vectores fundamental*  $X^*$  asociado a  $X$  do seguinte modo: para cada punto  $p \in M$ , considérase a curva  $\alpha(t) = \text{Exp}(tX) \cdot p$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , e defínese  $X_p^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(t)$ . Nótese que  $\alpha$  é unha curva contida na órbita  $H \cdot p$ , polo cal  $X^*$  é un campo tanxente ás órbitas da acción de  $H$ . É claro tamén que

$$T_p(H \cdot p) = \{X_p^* : X \in \mathfrak{h}\}.$$

Ademais, cada  $X^*$  é un campo de Killing pois o seu fluxo vén dado por isometrías do espazo ambiente. No caso do grupo de Lie  $AN \equiv \mathbb{C}H^n$  que nos ocupa, dado un campo invariante á esquerda  $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ , tanto  $X$  como  $X^*$  se poden ver como campos definidos en  $AN$ , pero é importante salientar que, en xeral,  $X$  e  $X^*$  non coinciden e teñen propiedades ben distintas. De feito (e isto é certo en calquera grupo de Lie),  $X^*$  é o campo invariante á dereita que no elemento neutro  $e$  do grupo vale  $X_e$ , pois  $X_g^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Exp}(tX) \cdot g = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_g(\text{Exp}(tX)) = R_{g*}X_e$ . Un exemplo disto vén dado polo campo unitario  $B \in \mathfrak{a}$ : veremos que as curvas integrais de  $B$  son xeodésicas asintóticas non equidistantes e cun só punto do infinito en común, mentres que, como vimos, as curvas integrais de  $B^*$  (que coinciden coas órbitas da acción de  $A$ ) son curvas equidistantes que, en xeral, non son xeodésicas e que comparten dous puntos do infinito (Figuras 2.1 e 2.2).



Voltemos ó noso estudo do grupo  $AN$ . Primeiramente, obsérvese que, dado o campo unitario  $B \in \mathfrak{a}$ , pola fórmula da conexión de Levi-Civita  $\bar{\nabla}$  de  $AN \equiv \mathbb{C}H^n$ , temos que  $\bar{\nabla}_B B = 0$ , polo cal as curvas integrais de  $B$  son xeodésicas, ademais, parametrizadas por arco;  $B$  é, por tanto, un campo xeodésico.

Agora, para un punto  $p \in \mathbb{C}H^n$  xenérico, mediante a identificación  $\mathbb{C}H^n \equiv AN$ , poñamos  $p \equiv g \in AN$ , co cal temos:

$$X_p^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Exp}(tX) \cdot p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (L_g \circ \varphi_{g^{-1}} \circ \text{Exp})(tX) = L_{g^*}(\text{Ad}(g^{-1})X).$$

Como  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  é completamente resoluble e  $AN$  simplemente conexo, existe un  $Y \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  tal que  $\text{Exp}(Y) = g^{-1}$ . Entón tense que:

$$\text{Ad}(g^{-1})X = \text{Ad}(\text{Exp}(Y))X = e^{\text{ad}(Y)}X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\text{ad}(Y))^k X \in \mathfrak{n},$$

xa que  $\text{ad}(Y)\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}$ . Considerando o campo unitario  $B \in \mathfrak{a}$ , séguese que

$$\langle B_g, X_p^* \rangle = \langle L_{g^*}(B), L_{g^*}(\text{Ad}(g^{-1})X) \rangle = \langle B, \text{Ad}(g^{-1})X \rangle = 0,$$

pois  $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{n}$ . Así pois, o campo invariante á esquerda  $B$  é ortogonal en todo punto ós campos de vectores fundamentais  $X^*$ , con  $X \in \mathfrak{n}$ . Debido a isto e a que a correspondencia lineal  $X \in \mathfrak{n} \mapsto X_p^* \in T_p(N \cdot p)$  é inxectiva (xa que  $X_p^* = L_{g^*}(\text{Ad}(g^{-1})X)$ ), tense que  $T_p(N \cdot p) = L_{g^*}\mathfrak{n}$ , polo que os campos invariantes á esquerda que conforman  $\mathfrak{n}$  xeran os espazos tanxentes das órbitas da acción de  $N$ . Ademais, obtemos que a acción de  $N$  dá lugar a unha foliación (todas as órbitas teñen codimensión 1).

Do razoamento anterior dedúcese que  $B$  é un campo unitario e normal ás órbitas da acción de  $N$ , polo cal as curvas integrais de  $B$  (que, como vimos, son xeodésicas) son tamén ortogonais ás órbitas de  $N$ . Denotemos por  $\gamma_p$  a xeodésica normal a  $N \cdot o$ , parametrizada por arco e con  $\gamma_p(0) = p$ . Tense entón, en particular, que para cada punto  $p \in N \cdot o$ , a xeodésica  $\gamma_p$  coincide coa curva integral de  $B$  pasando por  $p$ . Ademais, identificando coma de costume  $p \in N \cdot o$  con  $g \in N$ , a curva  $g \circ \gamma_{ox}$  é unha xeodésica de velocidade un que pasa por  $p$  e é normal a  $N \cdot o$ , pois  $\langle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \circ \gamma_{ox})(t), X_p^* \rangle = \langle L_{g^*}B, X_p^* \rangle = 0$ , para todo campo de vectores fundamental  $X^*$  asociado a  $X \in \mathfrak{n}$ . Pero entón  $\gamma_p = g \circ \gamma_{ox}$  é a curva integral de  $B$  polo punto  $p$ . Posto que  $AN = \bigcup_{g \in N} (g \circ \gamma_{ox})(\mathbb{R})$  (xa que  $ana^{-1} \in N$  para todo  $a \in A$  e  $n \in N$ ), toda curva integral de  $B$  é da forma  $g \circ \gamma_{ox}$  para algún  $g \in N$  (e tamén da forma  $\gamma_p$ , para algún  $p \in N \cdot o$ , con  $g \equiv p$  baixo a identificación usual).

Agora, para cada  $r \in [0, \infty)$  definamos a aplicación  $\Phi^r: N \cdot o \rightarrow \mathbb{C}H^n$  dada por  $\Phi^r(p) = \gamma_p(r)$ , onde  $\gamma_p$  denota, coma antes, a xeodésica normal a  $N \cdot o$  parametrizada por arco e tal que  $\gamma_p(0) = p$ .

Sexa  $\lambda \in \{\alpha, 2\alpha\}$  unha das dúas raíces positivas da descomposición en espazos de raíces de  $\mathfrak{g}$  que tiñamos determinada. Tense que  $\alpha(B) = \sqrt{-c}/2$  e  $2\alpha(B) = \sqrt{-c}$ . Sexan  $p \in N \cdot o$  e  $X \in \mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{n}$ . No que segue usaremos implicitamente o feito de que os elementos de  $\mathfrak{n}$  xeran os espazos tanxentes ás órbitas de  $N$ , e que as xeodésicas normais a estas órbitas son

curvas integrais de  $B$ . Denotemos por  $\zeta_X$  o campo de Jacobi ó longo de  $\gamma = \gamma_p$  determinado por  $\zeta_X(0) = X_p$  e  $\zeta'_X(0) = \bar{\nabla}_X B = -S_B X_p$  (onde  $S$  é o operador de configuración da hipersuperficie  $N \cdot o$ ). Tendo en conta a expresión para a conexión de Levi-Civita  $\bar{\nabla}$  de  $AN$ , esta última condición escríbese  $\zeta'_X(0) = -\lambda(B)X_p$ . Entón

$$\zeta(t) = e^{-\lambda(B)t} X_{\gamma(t)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

xa que verifica as condicións iniciais e a ecuación de Jacobi:

$$\zeta''(t) + R_{\zeta(t)\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = \lambda(B)^2 e^{-\lambda(B)t} X + e^{-\lambda(B)t} R_{XB} B = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde se usou de novo a fórmula da conexión de Levi-Civita de  $AN$ .

A teoría estándar de campos de vectores de Jacobi dinos que  $\Phi_{*p}^r X_p = \zeta_X(r)$ . Unha primeira conclusión é que  $\Phi_*^r$  é inxectiva para todo  $r \in \mathbb{R}$ , polo cal  $\Phi^r$  parametriza unha hipersuperficie equidistante a  $N \cdot o$ , para todo  $r \in \mathbb{R}$ ; estas hipersuperficies equidistantes resultan ser órbitas da acción de  $N$  posto que as órbitas dunha acción isométrica coma esta son sempre equidistantes. Por outra banda, deducimos tamén que  $\|\Phi_*^r X\| \leq e^{-\frac{\sqrt{-c}}{2}r} \|X\|$  para todo  $X \in \mathfrak{n}$ . Por tanto, a lonxitude da imaxe dunha curva arbitraria  $\sigma: [0, 1] \rightarrow N \cdot o$  pode ser estimada mediante  $L(\Phi^r \circ \sigma) \leq e^{-\frac{\sqrt{-c}}{2}r} L(\sigma)$ . Denotemos por  $\bar{d}$  a función distancia en  $\mathbb{C}H^n$  e por  $d$  a función distancia en  $N \cdot o$ . Tomando ínfimos deducimos que:

$$\bar{d}(\gamma_o(r), \gamma_p(r)) \leq e^{-\frac{\sqrt{-c}}{2}r} d(o, p), \quad \text{para todo } r \in [0, \infty) \text{ e para todo } p \in N \cdot o.$$

Séguese que as xeodésicas  $\gamma_o$  e  $\gamma_p$  non son equidistantes, e que  $\bar{d}(\gamma_o(t), \gamma_p(t)) \leq d(o, p)$  para todo  $t \geq 0$  e  $p \in N \cdot o$ , polo cal  $\gamma_o$  e  $\gamma_p$  son asintóticas: teñen o mesmo punto do infinito  $x$ . Noutras palabras,  $\gamma_o = \gamma_{ox}$  e  $\gamma_p = \gamma_{px}$ . Aínda máis, cúmprese que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{d}(\gamma_o(t), \gamma_p(t)) = 0$ . Outra conclusión importante é que, polo tanto, as curvas integrais de  $B$  son xeodésicas asintóticas con punto do infinito  $x$  (Figura 2.2).

*Observación 2.8.* Se consideramos un subespazo 2-dimensional real  $\mathfrak{v}$  de  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  que conteña a  $\mathfrak{a}$ , entón  $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$  é subálgebra de  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  e, pola fórmula da conexión de Levi-Civita de  $AN$ , a distribución invariante á esquerda asociada a  $\mathfrak{v}$  é autoparalela. Tense entón que a superficie totalmente xeodésica  $\text{Exp}(\mathfrak{v}) \cdot o = \exp_o(\mathfrak{v})$  é un plano hiperbólico real  $\mathbb{R}H^2$  totalmente xeodésico en  $\mathbb{C}H^n$  e que está foliado por unha familia 1-dimensional de xeodésicas asintóticas a  $x$ : as curvas integrais de  $B$  contidas nesta superficie (véxase a Figura 2.2). É coñecido que as xeodésicas asintóticas a un determinado punto do infinito do plano hiperbólico real só teñen en común ese punto do infinito (noutras palabras, esas mesmas xeodésicas parametrizadas en sentido oposto non son asintóticas). Concluimos entón que as curvas integrais do campo  $B$  en  $\mathbb{C}H^n$  só comparten un punto do infinito.

Para dar unha interpretación xeométrica máis concreta da acción de  $N$  debemos introducir algúns conceptos. Se  $\gamma$  é unha xeodésica parametrizada por arco e con  $\gamma(0) = q \in \mathbb{C}H^n$ , a función dada por  $\mathcal{B}_\gamma(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(\gamma(t), p) - t)$  chámase *función de Busemann* respecto de  $\gamma$ . Defínense as *horosferas* de  $\mathbb{C}H^n$  como os conxuntos de nivel dunha función de Busemann.

*Observación 2.9.* Unha horosfera definida pola función de Busemann  $\mathcal{B}_\gamma$  ten a seguinte interpretación xeométrica. Considérese a esfera xeodésica de radio  $r$  centrada en  $\gamma(r)$ ; contén por tanto a  $q = \gamma(0)$ . En  $\mathbb{C}H^n$  estas esferas xeodésicas están definidas para todo  $r > 0$ . Se facemos tender  $r$  a infinito, o conxunto límite destas esferas xeodésicas é unha horosfera. Diferentes escollos de  $q$  ó longo de  $\gamma$  dan todas as horosferas da foliación por horosferas determinada por  $\mathcal{B}_\gamma$  ou, equivalentemente, determinada polo punto do infinito  $x = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$ , que é o único punto de  $\mathbb{C}H^n \cup \mathbb{C}H^n(\infty)$  adherente a todas estas horosferas da foliación.

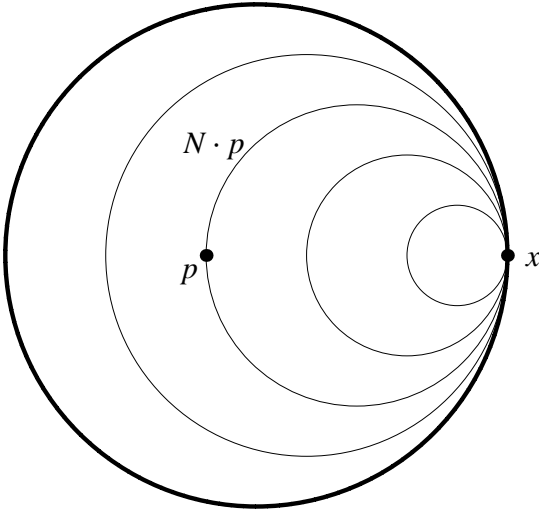
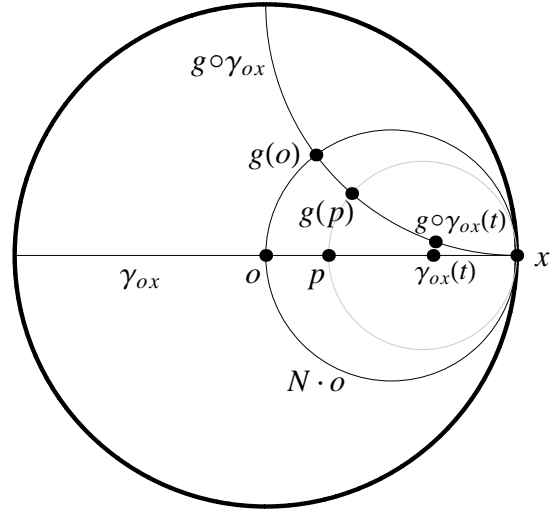


Figura 2.3: Foliación por horosferas.

Figura 2.4: As órbitas de  $N$  son horosferas.

O que probaremos será que a acción de  $N$  sobre  $\mathbb{C}H^n$  dá lugar a unha foliación por horosferas (Figura 2.3).

Sexan  $g \in N$  e  $p \in \gamma_{ox}(\mathbb{R})$ . Se  $p = \gamma_{ox}(t_0)$ , poñamos  $\varepsilon = 1$  se  $t_0 \geq 0$  e  $\varepsilon = -1$  en caso contrario. Posto que  $g \circ \gamma_{ox}$  é asintótica a  $\gamma_{ox}$  (véxase a Figura 2.4), tense que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{d}(\gamma_{ox}(t), g(p)) - \bar{d}(g \circ \gamma_{ox}(t), g(p))| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{d}(\gamma_{ox}(t), g \circ \gamma_{ox}(t)) = 0.$$

Logo  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{d}(\gamma_{ox}(t), g(p)) - \bar{d}(g \circ \gamma_{ox}(t), g(p))) = 0$ . Entón, como as órbitas de  $N$  son equidistantes entre si e como  $g \circ \gamma_{ox}$  é unha xeodésica minimizante que pasa por  $g(o)$  e  $g(p)$ , temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(g(p)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{d}(\gamma_{ox}(t), g(p)) - t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{d}(\gamma_{ox}(t), g(p)) - \bar{d}(g \circ \gamma_{ox}(t), g(o))) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{d}(\gamma_{ox}(t), g(p)) - \bar{d}(g \circ \gamma_{ox}(t), g(p))) - \varepsilon \bar{d}(g(o), g(p)) = -\varepsilon \bar{d}(o, p). \end{aligned}$$

Polo tanto, cada órbita  $N \cdot p$ , con  $p \in \gamma_{ox}(\mathbb{R})$ , está contida nun conxunto de nivel diferente de  $\mathcal{B}$ . Pero toda órbita da acción de  $N$  interseca á traza da xeodésica  $\gamma_{ox}$  (pois  $\gamma_{ox}(\mathbb{R})$  identifícase con  $A$  e, ademais,  $AN = NA = \bigcup_{a \in A} N \cdot a$ , xa que  $ana^{-1} \in N$  para todo

$a \in A$  e  $n \in N$ ). Por conseguinte, todas as órbitas son horosferas completas e, ademais, co mesmo punto do infinito  $x$ . É dicir, a acción de  $N$  determina en  $\mathbb{C}H^n$  unha foliación por horosferas cun punto do infinito común, que é xusto o determinado pola escolla do subespazo abeliano maximal  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{p}$  (Figura 2.3).

*Observación 2.10.* Como se viu, a escolla dun subespazo abeliano maximal  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{p}$  determina dous puntos do infinito  $x$  e  $y$ , que son os puntos do infinito da xeodésica  $A \cdot o$  parametrizada por arco nos dous sentidos posibles. O motivo de por que as curvas integrais de  $B$  son asintóticas a  $x$  e non a  $y$ , ou de por que as horosferas da acción de  $N$  teñen como punto do infinito a  $x$  e non a  $y$ , débese á escolla dun criterio de positividade no conxunto  $\Sigma = \{-2\alpha, -\alpha, \alpha, 2\alpha\}$  de raíces restrinxidas da álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1, n)$ . Poderíase ter definido  $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$  en lugar de  $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ , o cal daría como resultado que as curvas integrais dun elemento non trivial de  $\mathfrak{a}$  fosen asintóticas a  $y$  e que as horosferas da acción do novo  $N$  tivesen a  $y$  como punto do infinito. Así pois, as eleccións feitas para determinar unha descomposición de Iwasawa de  $\mathfrak{g}$  (a saber: o punto  $o$ , o subespazo abeliano maximal  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{p}$  e un criterio de positividade en  $\Sigma$ ) equivalen á escolla do punto  $o$  e dun punto do infinito  $x$ . Por iso, en ocasións fálase da descomposición de Iwasawa (da álgebra de Lie dun espazo simétrico de tipo non compacto de rango un) determinada por un punto do espazo e por un punto da fronteira ideal de tal espazo simétrico non compacto de rango un.

### 2.3. As subvariedades $W^{2n-k}$ e $W_{\varphi}^{2n-k}$

Durante bastante tempo pensouse que, ó igual que no caso de  $\mathbb{C}P^n$ , toda hipersuperficie homoxénea en  $\mathbb{C}H^n$  era Hopf (véxase o Capítulo 3 para unha motivación do tema das hipersuperficies homoxéneas, para a definición de hipersuperficie Hopf e para os principais resultados coñecidos ó respecto). Non obstante, en 1998 M. Lohnherr [30] (ou, tamén, [31], en colaboración con H. Reckziegel) construíu un contraexemplo: a hipersuperficie minimal regrada  $W^{2n-1}$  en  $\mathbb{C}H^n$ . En 2001, J. Berndt e M. Brück xeneralizaron en [6] esa construción ás subvariedades minimais regradas  $W^{2n-k}$  e  $W_{\varphi}^{2n-k}$ . Máis tarde, J. Berndt e H. Tamaru probaron en [11] que os tubos e hipersuperficies equidistantes en torno ás subvariedades  $W^{2n-k}$  e  $W_{\varphi}^{2n-k}$  son os únicos exemplos non clásicos de hipersuperficies homoxéneas no espazo hiperbólico complexo.

O obxectivo desta sección é o de construír as subvariedades minimais regradas  $W^{2n-k}$  e  $W_{\varphi}^{2n-k}$  de  $\mathbb{C}H^n$  e o de mencionar as propiedades que serán de interese para o noso estudo posterior. Para unha descrición máis detallada destas subvariedades pódense consultar [6], [10] e [22]. Na nosa exposición seguiremos o artigo de J. Berndt e J. C. Díaz Ramos [10].

Consideremos un espazo vectorial complexo  $\mathfrak{h}$ , con estrutura complexa  $J$ , e sexa  $\mathfrak{v}$  un subespazo vectorial de  $\mathfrak{h}$ . Para cada  $v \in \mathfrak{v}$ ,  $v \neq 0$ , o ángulo de Kähler de  $\mathfrak{v}$  con respecto de  $v$  defínese coma o ángulo  $\varphi(v) \in [0, \pi/2]$  comprendido entre  $\mathfrak{v}$  e o espazo  $\mathbb{R}Jv$  (o espazo  $\mathbb{R}$ -xerado por  $Jv$ ). Así  $\varphi(v) \in [0, \pi/2]$  queda determinado por que a norma da proxección ortogonal de  $Jv$  sobre  $\mathfrak{v}$  sexa  $\cos(\varphi(v)) \|v\|$ . Dise que  $\mathfrak{v}$  ten ángulo de Kähler constante  $\varphi$  se  $\varphi(v) = \varphi$  para todo vector non nulo  $v \in \mathfrak{v}$ . Os subespazos de  $\mathfrak{h}$  con ángulo de Kähler constante  $\varphi = 0$  son precisamente os subespazos complexos de  $\mathfrak{h}$ , e os subespazos de  $\mathfrak{h}$

con ángulo de Kähler constante  $\varphi = \pi/2$  son xusto os subespazos reais de  $\mathfrak{h}$ . Para unha clasificación e descrición explícita dos subespazos con ángulo de Kähler constante pódese consultar [6], Proposición 7.

Asumamos de aquí en diante as notacións empregadas neste capítulo. Sexa  $\mathfrak{w}$  un subespazo vectorial de  $\mathfrak{g}_\alpha$  tal que o complemento ortogonal  $\mathfrak{w}^\perp = \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{w}$  de  $\mathfrak{w}$  en  $\mathfrak{g}_\alpha$  ten ángulo de Kähler constante  $\varphi \in [0, \pi/2]$ . Entón  $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$  é unha subálgebra de Lie de  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ , dacordo coas propiedades da descomposición de  $\mathfrak{g}$  en espazos de raíces. Denotemos por  $S$  o subgrupo conexo de  $AN$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{s}$ . Dado que  $\text{Exp}|_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}} : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow AN$  é un difeomorfismo, tense que  $S$  é simplemente conexo e pechado en  $AN$ . Definimos  $W_\varphi^{2n-k} = S \cdot o$ , que é unha subvariedade  $(2n-k)$ -dimensional de  $\mathbb{C}H^n$ , onde  $k = \dim \mathfrak{w}^\perp$ .

Se  $\varphi = 0$ , isto é,  $\mathfrak{w}^\perp$  é un subespazo complexo de  $\mathfrak{g}_\alpha$ , entón  $W_0^{2n-k}$  é un subespazo hiperbólico complexo totalmente xeodésico  $\mathbb{C}H^{n-k'}$ , onde  $k = 2k'$ . Estamos ante un caso dexenerado.

Se  $\varphi = \pi/2$ , entón  $\mathfrak{w}^\perp$  é un subespazo  $k$ -dimensional real de  $\mathfrak{g}_\alpha$ . Se  $k = 1$ , a hipersuperficie correspondente  $W_{\pi/2}^{2n-1}$  denotáremola simplemente por  $W^{2n-1}$ , que coincide coa atopada por Lohnherr en [30]. Se  $k > 1$ , entón  $W_{\pi/2}^{2n-k}$  é unha subvariedade de dimensión  $2n-k$  con fibrado normal totalmente real e de rango  $k$ . Tamén poremos  $W^{2n-k}$  en vez de  $W_{\pi/2}^{2n-k}$ .

Se  $0 < \varphi < \pi/2$ , entón  $k$  é par (véxase [6]) e  $W_\varphi^{2n-k}$  é unha subvariedade de dimensión  $2n-k$  de  $\mathbb{C}H^n$  e tal que o seu fibrado normal ten ángulo de Kähler constante  $\varphi$  e rango  $k$ .

Posto que  $\mathbb{C}H^n$  é un espazo 2-puntos homoxéneo, a construción das subvariedades  $W^{2n-k}$  e  $W_\varphi^{2n-k}$  non depende da escolla da descomposición de Iwasawa de  $G$ , é dicir, todas as posibles escollas dan lugar a subvariedades holomorficamente congruentes entre si.

En [6] probouse que as subvariedades  $W^{2n-k}$  e  $W_\varphi^{2n-k}$  xorden como órbitas (singulares se  $k > 1$ ) de accións de cohomoxeneidade 1 en  $\mathbb{C}H^n$ , polo cal estas accións dan lugar a hipersuperficies homoxéneas en  $\mathbb{C}H^n$  (tales hipersuperficies son, por tanto, tubos ó redor de  $W^{2n-k}$  ou  $W_\varphi^{2n-k}$ , se  $k > 1$ , ou ben hipersuperficies equidistantes a  $W^{2n-1}$ ). Aínda que a demostración disto non é inmediata, si podemos esbozar unha idea. Sexa  $N_K^0(S)$  a compoñente conexa da identidade do normalizador de  $S$  en  $K$ ,

$$N_K(S) = \{k \in K : kSk^{-1} \subset S\},$$

que está formada por elementos de  $K$  que fixan  $S \cdot o$ . Por tanto,  $S \cdot o$  é unha órbita da acción de  $N_K^0(S)S$  sobre  $\mathbb{C}H^n$ . Séguese tamén que  $N_K^0(S)$  deixa invariante a esfera unidade do fibrado normal a  $S \cdot o$ , pois o fibrado tanxente queda invariante por  $N_K^0(S)$ . Para concluír que a acción de  $N_K^0(S)S$  sobre  $\mathbb{C}H^n$  é de cohomoxeneidade 1 queda por ver que  $N_K^0(S)$  actúa transitivamente na esfera unidade de  $\nu_o(S \cdot o)$ . Isto pode consultarse en [6]. Concluimos que  $W_\varphi^{2n-k} = N_K^0(S)S \cdot o = S \cdot o$  é a órbita por  $o$  da acción de  $N_K^0(S)S$  sobre  $\mathbb{C}H^n$ , que é de cohomoxeneidade 1. En particular, para  $k = 1$ , as órbitas desta acción forman unha foliación homoxénea con follas de codimensión un. Para máis detalles, véxase de novo [6] e tamén [5].

A continuación salientaremos algunhas propiedades xeométricas destas subvariedades. Para iso temos que introducir algo máis de notación.

Sexa  $\mathbb{C}\mathfrak{w}^\perp$  o subespazo complexo de  $\mathfrak{g}_\alpha$  xerado por  $\mathfrak{w}^\perp$ , e sexa  $\mathfrak{d} = \mathbb{C}\mathfrak{w}^\perp \ominus \mathfrak{w}^\perp$  o complemento ortogonal de  $\mathfrak{w}^\perp$  en  $\mathbb{C}\mathfrak{w}^\perp$ . Dado que  $\varphi > 0$ , temos que  $k = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\mathfrak{w}^\perp$  e, polo tanto,  $k = \dim \mathfrak{w}^\perp = \dim \mathfrak{d}$ . Para cada  $\xi \in \mathfrak{w}^\perp$  descompomos  $J\xi \in \mathbb{C}\mathfrak{w}^\perp = \mathfrak{d} + \mathfrak{w}^\perp$  en  $J\xi = P\xi + F\xi$  con  $P\xi \in \mathfrak{d}$  e  $F\xi \in \mathfrak{w}^\perp$ . Xa que  $\mathfrak{w}^\perp$  ten ángulo de Kähler constante  $\varphi$ , temos  $\langle F\xi, F\xi \rangle = \cos^2(\varphi)\langle \xi, \xi \rangle$  e entón  $\langle P\xi, P\xi \rangle = \sin^2(\varphi)\langle \xi, \xi \rangle$ . Como  $\varphi > 0$ , o homomorfismo  $P: \mathfrak{w}^\perp \rightarrow \mathfrak{d}$  é inxectivo, e como  $\dim \mathfrak{w}^\perp = \dim \mathfrak{d}$  obsérvase que  $P: \mathfrak{w}^\perp \rightarrow \mathfrak{d}$  é un isomorfismo. De  $-\xi = JJ\xi = JP\xi + JF\xi = JP\xi + PF\xi + F^2\xi$  séguese que a compoñente en  $\mathfrak{d}$ ,  $(JP\xi)_{\mathfrak{d}}$ , de  $JP\xi$  é igual a  $-PF\xi$ , e entón  $\langle (JP\xi)_{\mathfrak{d}}, (JP\xi)_{\mathfrak{d}} \rangle = \langle PF\xi, PF\xi \rangle = \sin^2(\varphi)\langle F\xi, F\xi \rangle = \sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi)\langle \xi, \xi \rangle = \cos^2(\varphi)\langle P\xi, P\xi \rangle$ . Posto que  $P: \mathfrak{w}^\perp \rightarrow \mathfrak{d}$  é un isomorfismo, isto implica que  $\mathfrak{d}$  ten tamén ángulo de Kähler constante  $\varphi$ .

Denotemos por  $\mathfrak{c}$  o subespazo complexo maximal de  $\mathfrak{s}$ . Nótese que  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \subset \mathfrak{c}$ ,  $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{c} = n - k$  e  $\mathfrak{s} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{d}$ . Temos entón a seguinte descomposición ortogonal

$$\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{d} \oplus \mathfrak{w}^\perp.$$

Designemos por  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$  e  $\mathfrak{W}^\perp$  as distribucións invariantes á esquerda sobre  $\mathbb{C}H^n$  ó longo de  $W_\varphi^{2n-k}$  que veñen inducidas por  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{c}$ ,  $\mathfrak{d}$  e  $\mathfrak{w}^\perp$ , respectivamente. Por construción, temos  $\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{D} = TW_\varphi^{2n-k}$  e  $\mathfrak{W}^\perp = \nu W_\varphi^{2n-k}$ .

A seguinte proposición (véxase [10] para a súa proba) danos información sobre estas distribucións.

**Proposición 2.11.** *A subvariedade  $W_\varphi^{2n-k}$ ,  $0 < \varphi \leq \pi/2$ , de  $\mathbb{C}H^n$  ten as seguintes propiedades:*

- (i) *O subfibrado holomorfo maximal  $\mathfrak{C}$  de  $TW_\varphi^{2n-k}$  é autoparalelo e as follas da foliación inducida sobre  $W_\varphi^{2n-k}$  son  $\mathbb{C}H^{n-k} \subset \mathbb{C}H^n$  totalmente xeodésicos. Polo tanto  $W_\varphi^{2n-k}$  é unha subvariedade regrada de  $\mathbb{C}H^n$ .*
- (ii) *As seguintes afirmacións son equivalentes:*
  - (a) *a distribución  $\mathfrak{D}$  sobre  $W_\varphi^{2n-k}$  é integrable;*
  - (b) *a distribución  $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{D}$  sobre  $W_\varphi^{2n-k}$  é integrable;*
  - (c) *o fibrado normal  $\mathfrak{W}^\perp$  é chan con respecto á conexión normal;*
  - (d)  $\varphi = \pi/2$ .

*Neste caso as follas da foliación sobre  $W_{\pi/2}^{2n-k}$  inducida por  $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{D}$  son  $\mathbb{R}H^{k+1} \subset \mathbb{C}H^n$  totalmente xeodésicos e as follas da foliación sobre  $W_{\pi/2}^{2n-k}$  inducida por  $\mathfrak{D}$  son horosferas con centro común nestes  $\mathbb{R}H^{k+1} \subset \mathbb{C}H^n$  totalmente xeodésicos.*

- (iii) *Para cada  $0 \neq \xi \in \mathfrak{w}^\perp$  a distribución invariante á esquerda  $\mathfrak{A} \oplus \mathbb{R}P\xi$  sobre  $W_\varphi^{2n-k}$  é autoparalela e as follas da foliación inducida sobre  $W_\varphi^{2n-k}$  son planos hiperbólicos reais  $\mathbb{R}H^2 \subset \mathbb{C}H^n$  totalmente xeodésicos.*

(iv) Para cada  $0 \neq \xi \in \mathfrak{w}^\perp$  a distribución invariante á esquerda  $\mathbb{R}P\xi$  sobre  $W_\varphi^{2n-k}$  é integrable e as follas da foliación inducida sobre  $W_\varphi^{2n-k}$  son horociclos con centro común no  $\mathbb{R}H^2 \subset \mathbb{C}H^n$  totalmente xeodésico dado pola distribución  $\mathfrak{A} \oplus \mathbb{R}P\xi$ .

Do resultado anterior é posible deducir a seguinte construción xeométrica das subvariedades  $W_\varphi^{2n-k} \subset \mathbb{C}H^n$ . De novo, consúltese [10] para unha demostración.

**Proposición 2.12.** *Sexa  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , e fíxese un  $\mathbb{C}H^{n-k} \subset \mathbb{C}H^n$  totalmente xeodésico e puntos  $o \in \mathbb{C}H^{n-k}$  e  $x$  na fronteira ideal  $\mathbb{C}H^{n-k}(\infty)$  de  $\mathbb{C}H^{n-k}$ . Sexa  $KAN$  a descomposición de Iwasawa de  $SU(1, n)$  con respecto de  $o$  e  $x$ , e sexa  $H'$  o subgrupo de  $AN$  que actúa simple e transitivamente sobre  $\mathbb{C}H^{n-k}$ . Agora, sexa  $W$  un subespazo  $\nu_o\mathbb{C}H^{n-k}$  con ángulo de Kähler constante  $\varphi \in (0, \pi/2]$  tal que  $\mathbb{C}W = \nu_o\mathbb{C}H^{n-k}$ . A traslación á esquerda de  $W$  por  $H'$  a todos os puntos de  $\mathbb{C}H^{n-k}$  determina un subfibrado  $\mathfrak{V}$  do fibrado normal  $\nu\mathbb{C}H^{n-k}$ . En cada punto  $p \in \mathbb{C}H^{n-k}$  adxúntense os horociclos determinados por  $x$  e as rectas lineais en  $\mathfrak{V}_p$ . O subconxunto resultante  $M$  de  $\mathbb{C}H^n$  é holomorficamente congruente á subvariedade regradada  $W_\varphi^{2n-k}$ .*

A seguinte proposición describe a xeometría extrínseca da subvariedade  $W_\varphi^{2n-k}$  en termos da súa segunda forma fundamental.

**Proposición 2.13.** *A segunda forma fundamental II de  $W_\varphi^{2n-k}$  vén dada por*

$$II(aB + U + P\xi + xZ, bB + V + P\eta + yZ) = \sqrt{-c} \frac{\text{sen}^2(\varphi)}{2} (y\xi + x\eta),$$

para todo  $\xi, \eta \in \mathfrak{w}^\perp$ ,  $U, V \in \mathfrak{c} \ominus (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha})$  e  $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ .

É dicir, II vén dada pola extensión bilinear simétrica trivial de

$$II(Z, P\xi) = \sqrt{-c} \frac{\text{sen}^2(\varphi)}{2} \xi,$$

para todo  $\xi \in \mathfrak{w}^\perp$ .

*Demostración.* Denotemos por  $(\cdot)^\perp$  a proxección ortogonal sobre o normal  $\nu W_\varphi^{2n-k}$ . Tense  $\langle JP\xi, \xi \rangle = -\langle P\xi, P\xi \rangle = -\text{sen}^2(\varphi)\langle \xi, \xi \rangle$ . Como  $\mathfrak{d}$  ten ángulo de Kähler constante  $\varphi$ , séguese que  $(JP\xi)^\perp$  ten norma  $\text{sen}(\varphi)\|P\xi\| = \text{sen}^2(\varphi)\|\xi\|$ . Por tanto  $(JP\xi)^\perp = -\text{sen}^2(\varphi)\xi$ . Tendo isto en conta, a fórmula de Gauß xunto coa expresión para a conexión de Levi-Civita  $\bar{\nabla}$  de  $\mathbb{C}H^n \cong AN$  implican

$$\begin{aligned} II(aB + U + P\xi + xZ, bB + V + P\eta + yZ) &= (\bar{\nabla}_{aB+U+P\xi+xZ}(bB + V + P\eta + yZ))^\perp \\ &= -\sqrt{-c} \left( \frac{y}{2} JP\xi + \frac{x}{2} JP\eta \right)^\perp \\ &= \sqrt{-c} \frac{\text{sen}^2(\varphi)}{2} (y\xi + x\eta). \quad \square \end{aligned}$$

Para os elementos  $X$  dunha base do tanxente a  $W_\varphi^{2n-k}$  adaptada á descomposición  $\mathfrak{c} \oplus \mathfrak{d}$  verifícase que  $II(X, X) = 0$ , de onde se segue o seguinte

**Corolario 2.14.**  $W_\varphi^{2n-k}$  é unha subvariedade minimal regrada de  $\mathbb{C}H^n$ .

A ecuación de arriba para a segunda forma fundamental caracteriza de feito as subvariedades minimais regradas  $W_\varphi^{2n-k}$  en  $\mathbb{C}H^n$ . Este é un teorema de rixidez enunciado e demostrado en [10] para o caso  $c = -1$  (o caso  $\varphi = \pi/2$  e  $c = -1$  fora xa probado en [8]). Pequenos cambios na súa demostración permiten probalo para calquera  $c < 0$ . Non obstante, unha transformación conforme (de feito homotética) con factor  $-c$  permite traducir o problema ó caso de curvatura  $-1$ , co cal o teorema con  $c$  arbitrario redúcese de xeito inmediato ó resultado para  $c = -1$ .

**Teorema 2.15** (Rixidez da subvariedade  $W_\varphi^{2n-k}$ ). *Sexa  $M$  unha subvariedade conexa de dimensión  $2n - k$  en  $\mathbb{C}H^n$ ,  $n \geq 2$ , con fibrado normal  $\nu M \subset T\mathbb{C}H^n$  con ángulo de Kähler constante  $\varphi \in (0, \pi/2]$ . Supoñamos que existe un campo de vectores unitario  $Z$  tanxente á distribución tanxente complexa maximal de  $M$  e tal que a segunda forma fundamental  $II$  de  $M$  vén dada pola extensión bilineal simétrica trivial de*

$$II(Z, P\xi) = \sqrt{-c} \frac{\text{sen}^2(\varphi)}{2} \xi$$

para todo  $\xi \in \nu M$ , onde  $P\xi$  é a compoñente tanxencial de  $J\xi$ .

Entón  $M$  é holomorficamente congruente a unha parte aberta da subvariedade minimal regrada  $W_\varphi^{2n-k}$ .

Este resultado de rixidez (en concreto para o caso  $\varphi = \pi/2$ ) será fundamental na última parte deste traballo para poder concluír que certas subvariedades son precisamente do tipo  $W_\varphi^{2n-k}$ .



## Capítulo 3

# Hipersuperficies homoxéneas en $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$

Unha subvariedade  $M$  dunha variedade de Riemann  $\bar{M}$  dise (extrinsecamente) homoxénea se existe un subgrupo pechado  $G$  do grupo de isometrías de  $\bar{M}$  tal que  $M$  é unha órbita da acción de  $G$  sobre  $\bar{M}$ . É de especial interese o caso das hipersuperficies homoxéneas, que xorden como órbitas principais de accións de cohomoxeneidade un. A razón principal é que, se  $\bar{M}$  é un espazo de cohomoxeneidade un, certos sistemas de ecuacións diferenciais en derivadas parciais que se poden presentar sobre  $\bar{M}$  poden ser reducidos a un sistema de ecuacións diferenciais ordinarias, o cal pode facilitar a súa resolución. Este procedemento ten funcionado, por exemplo, para a construción de variedades con holonomía especial, para proporcionar exemplos de estruturas Einstein, Einstein-Kähler e Einstein-Weyl [3], para construír métricas con curvatura prescrita (por exemplo, para buscar variedades de curvatura positiva, [21] e [48]) e para o estudo de aplicacións harmónicas, ecuacións de Yang-Mills e subvariedades Lagrangianas especiais. Estes avances teñen sido de particular relevancia nos eidos da Xeometría e da Física Teórica.

No campo da Xeometría de subvariedades, un problema interesante é, por tanto, o de clasificar as hipersuperficies homoxéneas e o de caracterizalas en termos xeométricos.

Pola propia definición, dada unha hipersuperficie homoxénea  $M$ , os operadores de configuración  $S_p$  para os puntos  $p \in M$  respecto dun campo unitario normal son todos conxugados (polas diferenciais dos elementos do grupo que actúa en  $\bar{M}$  con cohomoxeneidade un), polo que  $M$  ten curvaturas principais constantes. De aquí en diante,  $g$  denotará o número de curvaturas principais dunha hipersuperficie con curvaturas principais constantes.

É natural preguntarse ata que punto a propiedade de ter curvaturas principais constantes caracteriza ás hipersuperficies homoxéneas. É dicir, se  $M$  é unha hipersuperficie con curvaturas principais constantes, é entón unha parte aberta dunha hipersuperficie homoxénea?

Os métodos que se teñen desenvolto para responder a este problema pasan, polo xeral, polo problema da clasificación das hipersuperficies con curvaturas principais constantes dun determinado espazo ambiente. Pero xa desde a década dos 30, cando Élie Cartan tratou de abordar este tema, parece claro que se trata dun problema que dista moito de ser trivial.

Neste capítulo trataremos de expor brevemente a evolución do problema e o seu estado a día de hoxe, centrándonos no caso dos espazos de curvatura seccional holomorfa constante.

Nos espazos de curvatura constante, conseguiuase a clasificación completa das hipersuperficies con curvaturas principais constantes no espazo euclidiano (T. Levi-Civita [29] para  $\mathbb{R}^3$ , B. Segre [40] para  $\mathbb{R}^n$ ) e no hiperbólico  $\mathbb{R}H^n$  (É. Cartan [13]). No caso euclidiano, a clasificación redúcese a hiperplanos afíns, esferas e produtos de esferas por subespazos afíns. No caso hiperbólico, obtéñense as hiperesferas xeodésicas, as horosferas, os hiperplanos totalmente xeodésicos e as súas hipersuperficies equidistantes, e os tubos ó redor de subespazos totalmente xeodésicos de dimensión polo menos un. Como consecuencia obtense que, nestes dous casos, as hipersuperficies con curvaturas principais constantes son todas partes abertas de hipersuperficies homoxéneas.

En cambio, nas esferas o problema resulta ser moito máis complicado. Cartan clasificou as hipersuperficies con  $g \in \{1, 2, 3\}$  curvaturas principais constantes, pero non soubo resolver o caso xeral. As hipersuperficies homoxéneas coñécense todas debido á clasificación de W.-Y. Hsiang e B. Lawson Jr. en [24], da cal se segue que  $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  para estas hipersuperficies. H. F. Münzner probou en [33] que  $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  para todas as hipersuperficies con curvaturas principais constantes nas esferas. Pero, sorprendentemente, para  $g = 4$  existen hipersuperficies con curvaturas principais constantes que non son homoxéneas (cf. [19]). Nos últimos anos, T. E. Cecil, Q.-S. Chi e G. R. Jensen [14] e, independentemente, S. Immervoll [25] probaron que, cunhas poucas posibles excepcións, as hipersuperficies con  $g = 4$  están entre os exemplos homoxéneos e non homoxéneos coñecidos. Tense conseguido progresar algo no caso  $g = 6$  (U. Abresch en [1], J. Dorfmeister e E. Neher en [17]), pero o problema aínda está aberto. Pódese consultar [45] para unha introdución a este tema.

*Observación 3.1.* No ámbito dos espazos de curvatura constante é habitual refirirse ás hipersuperficies con curvaturas principais constantes como hipersuperficies isoparamétricas. Nunha variedade de Riemann, unha hipersuperficie dise *isoparamétrica* se ela e as súas hipersuperficies equidistantes suficientemente próximas teñen curvatura media constante. Cartan probou en [13] que, nos espazos de curvatura constante, esta condición equivale a de ter curvaturas principais constantes. Non obstante, esta equivalencia deixa de ser certa en xeral. Pódense atopar contraexemplos no espazo proxectivo complexo debidos a Q. M. Wang en [46].

Nos espazos de curvatura seccional holomorfa constante o problema parece tamén complicado. Véxase [34] para unha introdución a algúns problemas relacionados nos espazos de curvatura holomorfa constante. Dado que o espazo complexo chan  $\mathbb{C}^n$  é isométrico a  $\mathbb{R}^{2n}$ , restrinxímonos ó caso non chan e, como para  $n = 1$ ,  $\mathbb{C}P^1(c)$  é isométrico á esfera  $S^2$  de radio  $1/\sqrt{c}$  (curvatura  $c$ ) e  $\mathbb{C}H^1(c)$  é isométrico ó plano hiperbólico real  $\mathbb{R}H^2$  de curvatura  $c$ , quedámonos tan só co caso  $n \geq 2$ .

De aquí en diante,  $M$  denotará unha hipersuperficie real dun espazo de curvatura seccional holomorfa constante  $\bar{M} = \bar{M}^n(c)$ ,  $c \neq 0$ ;  $\xi$  denotará un campo de vectores unitario normal (en principio definido tan só localmente). Designaremos, como é costume, por  $J$  á estrutura complexa Kähler de  $\bar{M}$ . Nótese que, entón, o campo  $J\xi$  é tanxente a  $M$ .

Unha definición importante no ámbito das hipersuperficies con curvaturas principais constantes nos espazos de curvatura holomorfa constante é a de hipersuperficie Hopf. Dise que unha hipersuperficie real  $M$  de  $\bar{M}$  é *Hopf* se o campo  $J\xi$  é un campo de curvatura principal, é dicir, se  $J\nu(M)$  é invariante polo operador de configuración  $S$ . A  $J\xi$  denomínaselle *campo de Hopf* (ou tamén *campo de estrutura* ou *campo de Reeb*).

Agora explicaremos por separado os casos do espazo proiettivo complexo e do espazo hiperbólico complexo.

### 3.1. O problema en $\mathbb{C}P^n$

A clasificación das hipersuperficies reais homoxéneas no espazo proiettivo complexo  $\mathbb{C}P^n$  débese a R. Takagi [42] en 1973. A idea da proba é a seguinte. Pódese ver que toda hipersuperficie homoxénea en  $\mathbb{C}P^n$  é a proxección dunha hipersuperficie homoxénea en  $S^{2n+1}$  pola aplicación de Hopf  $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . Pero non toda hipersuperficie homoxénea en  $S^{2n+1}$  é invariante baixo a acción da fibra  $S^1$  e, polo tanto, non proxecta a unha hipersuperficie homoxénea en  $\mathbb{C}P^n$ . O que Takagi probou, valéndose da clasificación das hipersuperficies homoxéneas nas esferas de Hsiang e Lawson, foi que aquelas que si proxectan son precisamente as que xorden como representacións de isotropía de espazos simétricos hermitianos de rango 2. Enunciamos agora o teorema de clasificación das hipersuperficies homoxéneas en  $\mathbb{C}P^n$  (na formulación que aparece en [7], Teorema 9.5.1; véxase tamén [34]).

**Teorema 3.2.** *Unha hipersuperficie real en  $\mathbb{C}P^n$ ,  $n \geq 2$ , é homoxénea se, e só se, é holomorficamente congruente a unha das seguintes hipersuperficies:*

- (1) *un tubo ó redor dun  $\mathbb{C}P^k$  totalmente xeodésico en  $\mathbb{C}P^n$ , para algún  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,*
- (2) *un tubo ó redor da cuádriga complexa  $Q^{n-1} = \{[z] \in \mathbb{C}P^n : z_0^2 + \dots + z_n^2 = 0\}$  en  $\mathbb{C}P^n$  (ou, equivalentemente, un tubo ó redor dun  $\mathbb{R}P^n$  totalmente xeodésico),*
- (3) *un tubo ó redor do mergullo de Segre de  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^k$  en  $\mathbb{C}P^{2k+1}$  para algún  $k \geq 2$ ,*
- (4) *un tubo ó redor do mergullo de Plücker en  $\mathbb{C}P^9$  da Grassmanniana complexa  $G_2(\mathbb{C}^5)$  de 2-planos complexos en  $\mathbb{C}^5$ ,*
- (5) *un tubo ó redor do mergullo “half spin” en  $\mathbb{C}P^{15}$  do espazo simétrico hermitiano  $SO(10)/U(5)$ .*

Os correspondentes espazos simétricos hermitianos de rango dous cuxas representacións de isotropía dan lugar a estes mergullos vía a aplicación de Hopf son (1)  $\mathbb{C}P^{k+1} \times \mathbb{C}P^{n-k}$ , (2)  $G_2^+(\mathbb{R}^{n+3})$ , (3)  $G_2(\mathbb{C}^{k+3})$ , (4)  $SO(10)/U(5)$ , (5)  $E_6/(U(1) \times Spin(10))$ .

Indiquemos que o mergullo de Segre de  $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$  en  $\mathbb{C}P^{(n+1)(m+1)-1}$  vén dado por

$$([z_0, \dots, z_n], [w_0, \dots, w_m]) \longmapsto [z_0w_0, z_0w_1, \dots, z_0w_m, z_1w_0, \dots, z_iw_j, \dots, z_nw_m],$$

onde se tomaron todos os produtos da forma  $z_iw_j$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq m$ , en orde lexicográfica.

O mergullo de Plücker da Grassmanniana  $G_k(\mathbb{C}^m)$  en  $\mathbb{C}P^r$ , con  $r = \binom{m}{k} - 1$ , vén dado por

$$\text{span}(v_1, \dots, v_k) \longmapsto [\det A_0, \dots, \det A_r],$$

onde  $A_0, A_1, \dots, A_r$  son todos os menores de orde  $k$  da matriz de orde  $k \times m$  cuxas filas son as compoñentes dos vectores  $v_1, \dots, v_k$ .

Finalmente, para definir o mergullo “half-spin”, sexan  $\Delta^+$  e  $\Delta^-$  as dúas representacións reais “half-spin” correspondentes á acción de  $Spin(10)$  sobre  $\mathbb{R}^{32} \equiv \mathbb{C}^{16}$  (véxase [2], Capítulo 4, ou [41], Apartado 2.1.2.4, para a definición destas representacións), e sexa  $\vartheta$  a representación canónica de  $U(1)$  en  $\mathbb{C}^{16}$  dada pola multiplicación polos complexos unitarios. Entón a representación  $\vartheta^3 \otimes \Delta^+ + \vartheta^{-3} \otimes \Delta^-$  de  $U(1) \times Spin(10)$  en  $\mathbb{R}^{32} \equiv \mathbb{C}^{16}$  induce, vía a aplicación de Hopf, un mergullo de  $SO(10)/U(5)$  en  $\mathbb{C}P^{15}$ . Para consultar os detalles deste mergullo, véxase [7], páx. 88 e tamén Sección 9.3d.

Unha consecuencia importante do resultado de Takagi é que toda hipersuperficie homoxénea en  $\mathbb{C}P^n$  é Hopf, aínda que non se entende moi ben por que isto é así. De feito, veremos que o resultado análogo en  $\mathbb{C}H^n$  non é certo. Outra consecuencia é que  $g \in \{2, 3, 5\}$  para toda hipersuperficie homoxénea de  $\mathbb{C}P^n$ .

Pouco máis tarde, Takagi clasificou as hipersuperficies reais con 2 e 3 curvaturas principais constantes en [43] ( $g = 2$ ) e [44] ( $g = 3, n \geq 3$ ). O caso  $g = 3, n = 2$  resolveuno Q. M. Wang en [47]. Para o caso  $g = 1$  (hipersuperficies umbílicas), é unha consecuencia sinxela da ecuación de Codazzi (véxase o Lema 4.2 do Capítulo 4) que non hai hipersuperficies cunha soa curvatura principal constante.

**Teorema 3.3.** *Sexa  $M$  unha hipersuperficie real en  $\mathbb{C}P^n$ ,  $n \geq 2$ , con dúas curvaturas principais constantes distintas. Entón  $M$  é unha parte aberta dunha hiperesfera xeodésica en  $\mathbb{C}P^n$ .*

**Teorema 3.4.** *Sexa  $M$  unha hipersuperficie real en  $\mathbb{C}P^n$ ,  $n \geq 2$ , con tres curvaturas principais constantes distintas. Entón  $M$  é unha parte aberta dunha das seguintes hipersuperficies:*

- (1) un tubo ó redor dun  $\mathbb{C}P^k$  totalmente xeodésico en  $\mathbb{C}P^n$ , para algún  $k \in \{1, \dots, n-2\}$ ,
- (2) un tubo ó redor da cuádrica complexa  $Q^{n-1}$  en  $\mathbb{C}P^n$ .

Dos resultados anteriores séguese que as hipersuperficies reais con  $g \leq 3$  en  $\mathbb{C}P^n$  son todas partes abertas de hipersuperficies homoxéneas.

M. Kimura, no ano 1986, clasificou en [26] as hipersuperficies reais Hopf con curvaturas principais constantes en  $\mathbb{C}P^n$ , sendo todas elas partes abertas de hipersuperficies homoxéneas. Kimura emprega basicamente os resultados de Takagi [42] e de Münzner [33]. En particular, fai uso do feito de que o número de curvaturas principais constantes dunha hipersuperficie Hopf está restrinxido ó conxunto  $\{2, 3, 5\}$  debido ós resultados de Münzner.

Ata o de agora non se coñecen hipersuperficies con curvaturas principais constantes en  $\mathbb{C}P^n$  que non sexan Hopf (equivalentemente, que non sexan homoxéneas), nin se coñece o número de curvaturas principais constantes que pode ter unha hipersuperficie non Hopf en  $\mathbb{C}P^n$ .

## 3.2. O problema en $\mathbb{C}H^n$

En relación ó caso do espazo hiperbólico complexo, S. Montiel probou en 1985 o seguinte teorema, que non fai uso da hipótese da constancia das curvaturas principais:

**Teorema 3.5.** [32] *Sexa  $M$  unha hipersuperficie real no espazo hiperbólico complexo  $\mathbb{C}H^n$  de curvatura seccional holomorfa  $-1$ ,  $n \geq 3$ , con ó sumo dúas curvaturas principais en cada punto. Entón  $M$  é unha parte aberta dunha das seguintes hipersuperficies:*

- (1) *unha horosfera en  $\mathbb{C}H^n$ ,*
- (2) *unha hiperesfera xeodésica en  $\mathbb{C}H^n$ ,*
- (3) *un tubo ó redor dun  $\mathbb{C}H^{n-1}$  totalmente xeodésico en  $\mathbb{C}H^n$ ,*
- (4) *un tubo de radio  $r = \ln(2 + \sqrt{3})$  ó redor dun espazo hiperbólico real  $\mathbb{R}H^n$  totalmente xeodésico en  $\mathbb{C}H^n$ .*

Deste resultado séguese que non existen hipersuperficies umbílicas en  $\mathbb{C}H^n$ . Todos os exemplos do teorema son hipersuperficies Hopf con curvaturas principais constantes.

As hipersuperficies Hopf con curvaturas principais constantes foron clasificadas en 1989 por J. Berndt en [4]:

**Teorema 3.6.** *Sexa  $M$  unha hipersuperficie Hopf en  $\mathbb{C}H^n$ ,  $n \geq 2$ , con curvaturas principais constantes. Entón  $M$  é unha parte aberta dunha das seguintes hipersuperficies:*

- (1) *unha horosfera en  $\mathbb{C}H^n$ ,*
- (2) *un tubo ó redor dun  $\mathbb{C}H^k$  totalmente xeodésico en  $\mathbb{C}H^n$ , para algún  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,*
- (3) *un tubo ó redor dun espazo hiperbólico real  $\mathbb{R}H^n$  totalmente xeodésico en  $\mathbb{C}H^n$ .*

A demostración de Berndt fai uso dunha versión complexa da fórmula fundamental de Cartan para hipersuperficies con curvaturas principais constantes nos espazos de curvatura constante (véxase [13] e tamén [7], Sección 3.8e). Para derivar tal fórmula, a restrición de que  $M$  sexa Hopf é fundamental. No caso xeral, as ecuacións de Gauß e Codazzi parecen demasiado complicadas para a dedución dunha fórmula o suficientemente manexable.

As hipersuperficies Hopf anteriores son todas homoxéneas. En efecto, xa vimos que unha horosfera se pode ver coma unha órbita da acción da parte nilpotente dunha determinada descomposición de Iwasawa do grupo de isometrías  $SU(1, n)$  de  $\mathbb{C}H^n$ . Similarmente, non é difícil comprobar que un tubo ó redor dun  $\mathbb{C}H^k$  totalmente xeodésico é unha órbita principal da acción de  $S(U(1, k)U(n-k)) \subset SU(1, n)$ , e un tubo ó redor dun  $\mathbb{R}H^n$  totalmente xeodésico é unha órbita principal da acción de  $SO^0(1, n) \subset SU(1, n)$ . Non obstante, o problema da clasificación das hipersuperficies homoxéneas seguía aberto.

En 1998, M. Lohnherr atopou unha hipersuperficie real homoxénea regrada non Hopf en  $\mathbb{C}H^n$  [30] (véxase tamén [31]): a hipersuperficie  $W^{2n-1}$  descrita na Sección 2.3. Isto significou que a clasificación das hipersuperficies homoxéneas en  $\mathbb{C}H^n$  podería ser máis

difícil do agardado. Máis tarde, Berndt e Brück xeneralizaron en [6] esta construción ás subvariedades  $W_\varphi^{2n-k}$ , que se describiron tamén en 2.3. Grazas a estes descubrimentos, Berndt e Tamaru obtiveron en [11] a clasificación das accións de cohomoxeneidade un sobre  $\mathbb{C}H^n$ , da cal se segue o seguinte resultado de clasificación de hipersuperficies homoxéneas:

**Teorema 3.7.** *Sexa  $M$  unha hipersuperficie real homoxénea en  $\mathbb{C}H^n$ ,  $n \geq 2$ . Entón  $M$  é holomorficamente congruente a unha das seguintes hipersuperficies:*

- (1) un tubo ó redor dun  $\mathbb{C}H^k$  totalmente xeodésico, para algún  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,
- (2) un tubo ó redor dun  $\mathbb{R}H^n$  totalmente xeodésico,
- (3) unha horosfera en  $\mathbb{C}H^n$ ,
- (4) a hipersuperficie real regrada  $W^{2n-1}$  ou unha das súas hipersuperficies equidistantes,
- (5) un tubo ó redor da subvariedade minimal regrada  $W_\varphi^{2n-k}$  para algún  $\varphi \in (0, \pi/2]$  e  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ , onde  $k$  é par se  $\varphi \neq \pi/2$ .

O número de curvaturas principais dos exemplos homoxéneos é  $g \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Non obstante, a diferenza do que sucede no caso proxectivo complexo, non todos eles son Hopf. As hipersuperficies homoxéneas do tipo (4) e as do tipo (5) con  $\varphi = \pi/2$  (i.e.  $W^{2n-1}$ , as súas hipersuperficies equidistantes e os tubos ó redor das  $W^{2n-k}$ ) teñen un campo de Hopf  $J\xi$  que proxecta de xeito non trivial sobre exactamente dous espazos de curvaturas principais. As hipersuperficies do tipo (5) con  $\varphi \neq \pi/2$  verifican que  $J\xi$  proxecta de xeito non trivial sobre exactamente tres espazos de curvaturas principais. Estas observacións, que se poden atopar detalladas en [10], van ser moi importantes para este traballo.

Unha vez probada a existencia de hipersuperficies homoxéneas non Hopf, preséntase o problema de se existen hipersuperficies con curvaturas principais constantes que non sexan homoxéneas. Para o caso  $g \leq 2$ ,  $n \geq 3$ , a resposta é negativa, dacordo co resultado de Montiel. Berndt e Díaz Ramos probaron en [9] que toda hipersuperficie con  $g = 2$  curvaturas principais constantes en  $\mathbb{C}H^2$  é Hopf, e atoparon en [8] (caso  $n \geq 3$ ) e en [9] (caso  $n = 2$ ) a clasificación das hipersuperficies con  $g = 3$  curvaturas principais constantes en  $\mathbb{C}H^n$ :

**Teorema 3.8.** *Sexa  $M$  unha hipersuperficie real no espazo hiperbólico complexo  $\mathbb{C}H^n$  de curvatura seccional holomorfa  $-1$ ,  $n \geq 2$ , con tres curvaturas principais constantes. Entón  $M$  é unha parte aberta dunha hipersuperficie real homoxénea en  $\mathbb{C}H^n$ . Máis concretamente,  $M$  é holomorficamente congruente a unha parte aberta dunha das seguintes hipersuperficies:*

- (1) un tubo ó redor dun  $\mathbb{C}H^k$  totalmente xeodésico en  $\mathbb{C}H^n$  para algún  $k \in \{1, \dots, n-2\}$ ,
- (2) un tubo de radio  $r > 0$ ,  $r \neq \ln(2+\sqrt{3})$ , ó redor dun  $\mathbb{R}H^n \subset \mathbb{C}H^n$  totalmente xeodésico,
- (3) unha hipersuperficie minimal regrada  $W^{2n-1}$  ou unha das súas hipersuperficies equidistantes,

- (4) un tubo de radio  $r = \ln(2 + \sqrt{3})$  ó redor da subvariedade minimal regrada  $W^{2n-k}$  para algún  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ .

*Observación 3.9.* A argumentación e os cálculos desenvolto en [8] están feitos para o caso de  $\mathbb{C}H^n(-1)$ ,  $n \geq 3$ , pero xeneralízanse sen problema ó caso de curvatura seccional holomorfa constante  $c \neq 0$  arbitraria, obtendo que toda hipersuperficie real en  $\mathbb{C}P^n(c)$ ,  $n \geq 3$ , con tres curvaturas principais constantes é Hopf. Isto constitúe, vía o resultado de Kimura, unha proba alternativa ó resultado de Takagi en [43].

Ó igual que no caso proxectivo, a clasificación das hipersuperficies reais con  $g \geq 4$  curvaturas principais constantes segue sendo un problema aberto. Visto desde outro enfoque, descoñécese unha clasificación das hipersuperficies non Hopf, tanto en  $\mathbb{C}P^n$  como en  $\mathbb{C}H^n$ . A nosa aportación orixinal neste traballo pretende botar algo de luz sobre estas cuestións, tanto no caso proxectivo coma no hiperbólico. En concreto, abordaremos o seguinte paso natural despois das clasificacións de Berndt e Kimura das hipersuperficies Hopf con curvaturas principais constantes: en lugar de clasificar hipersuperficies tales que  $J\xi$  teña proxección non trivial sobre un só espazo de curvatura, trataremos o problema de que o campo de Hopf  $J\xi$  teña proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvaturas principais.





# Capítulo 4

## Hipersuperficies non Hopf con curvaturas principais constantes

Neste capítulo desenvolvemos a demostración do resultado orixinal deste traballo: a clasificación das hipersuperficies reais dos espazos proxectivo e hiperbólico complexos con curvaturas principais constantes e tales que o campo de Hopf ten proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvaturas principais.

A demostración estrutúrase do seguinte modo. Na Sección 4.1, a partir das ecuacións de Gauß e Codazzi, presentamos varias ecuacións xerais válidas para calquera hipersuperficie con curvaturas principais constantes nos espazos de curvatura holomorfa constante. Na Sección 4.2 desenvolvemos a parte central da demostración. Nas Subseccións 4.2.1 e 4.2.2 aparecen de xeito natural certas funcións e campos de vectores definidos sobre a hipersuperficie, dos cales se deducen algunhas propiedades. Na Subsección 4.2.3 afóndase no estudo da estrutura dos espazos de curvaturas principais. Os métodos que usamos aquí xeneralizan en certo sentido os empregados en [8]. O paso crucial da demostración é o de amosar que o número  $g$  de curvaturas principais verifica  $g \leq 4$  (Subsección 4.2.4). Para isto usamos un enfoque novidoso baseado no estudo de certas desigualdades que cumpren as curvaturas principais. Na Subsección 4.2.5 resumimos a información conseguida sobre a estrutura de autovalores e autoespazos do operador de configuración, e probamos que as hipersuperficies nas condicións do teorema son orientables. Finalmente, empregando a teoría estándar de campos de vectores de Jacobi, podemos deducir a xeometría das posibles subvariedades focais (ou hipersuperficies equidistantes) e, entón, concluír a proba botando man do Teorema de rixidez 2.15.

Os resultados deste capítulo pódense atopar tamén en [16].

Por  $\bar{M}^n(c)$  denotaremos o espazo de curvatura seccional holomorfa constante  $c \neq 0$  e de dimensión real  $2n$ , con  $n \geq 2$ . É dicir, se  $c > 0$  entón  $\bar{M}^n(c) = \mathbb{C}P^n(c)$  é o espazo proxectivo complexo con curvatura seccional holomorfa  $c$  e, se  $c < 0$  entón  $\bar{M}^n(c) = \mathbb{C}H^n(c)$  é o espazo hiperbólico complexo con curvatura seccional holomorfa  $c$ . A estrutura complexa de  $\bar{M}^n(c)$  denotarémola por  $J$ .

Sexa  $M$  un hipersuperficie real conexa de  $\bar{M}^n(c)$  e con campo normal unitario  $\xi$  (en

principio tan só definido localmente) e supoñamos que  $M$  ten  $g$  curvaturas principais constantes distintas, curvaturas que denotaremos por  $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ .

O noso obxectivo aquí será o de probar o seguinte Teorema:

**Teorema Principal.** *Sexa  $M$  unha hipersuperficie real conexas de  $\mathbb{C}H^n(c)$  ou de  $\mathbb{C}P^n(c)$ ,  $n \geq 2$ , con curvaturas principais constantes. Entón:*

- *Se  $M \subset \mathbb{C}P^n(c)$  entón  $J\xi$  non pode ter proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvatura.*
- *Se  $M \subset \mathbb{C}H^n(c)$  e  $J\xi$  ten proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvatura, entón  $g \in \{3, 4\}$  e  $M$  é holomorficamente congruente a unha parte aberta de:*
  - *(se  $g = 3$ ) a hipersuperficie regrada minimal  $W^{2n-1} \subset \mathbb{C}H^n(c)$ , ou unha das súas hipersuperficies equidistantes, ou un tubo de radio  $r = \frac{1}{\sqrt{-c}} \ln(2 + \sqrt{3})$  ó redor da subvariedade minimal regrada  $W^{2n-k} \subset \mathbb{C}H^n(c)$  para algún  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ .*
  - *(se  $g = 4$ ) un tubo de radio  $r \neq \frac{1}{\sqrt{-c}} \ln(2 + \sqrt{3})$  ó redor da subvariedade minimal regrada  $W^{2n-k} \subset \mathbb{C}H^n(c)$  para algún  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ .*

## 4.1. As ecuacións dunha hipersuperficie con curvaturas principais constantes en $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{C}H^n$

Comecemos cuns cantos resultados válidos para calquera hipersuperficie  $M$  en  $\bar{M}^n(c)$  con curvaturas principais constantes. Estas propiedades serán consecuencia das ecuacións de Gauß e Codazzi, da curvatura holomorfa constante do espazo ambiente e da hipótese de curvaturas principais constantes. Os resultados desta sección xa foran probados en [8] para o caso  $c = -1$ .

**Lema 4.1.** *Para todo  $X \in \Gamma(T_{\lambda_i})$ ,  $Y \in \Gamma(T_{\lambda_j})$  e  $Z \in \Gamma(T_{\lambda_k})$  temos que*

$$\bar{R}_{XYZ\xi} = (\lambda_j - \lambda_k) \langle \nabla_X Y, Z \rangle - (\lambda_i - \lambda_k) \langle \nabla_Y X, Z \rangle.$$

*Demostración.* Séguese de xeito inmediato da ecuación de Codazzi e de que  $M$  teña curvaturas principais constantes:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{XYZ\xi} &= \langle (\nabla_X S)Y - (\nabla_Y S)X, Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X SY - S\nabla_X Y - \nabla_Y SX + S\nabla_Y X, Z \rangle \\ &= \lambda_j \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle \nabla_X Y, SZ \rangle - \lambda_i \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Y X, SZ \rangle \\ &= (\lambda_j - \lambda_k) \langle \nabla_X Y, Z \rangle - (\lambda_i - \lambda_k) \langle \nabla_Y X, Z \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

**Lema 4.2.** *Se, no punto  $p \in M$ , a proxección ortogonal de  $J\xi_p$  sobre  $T_{\lambda_i}(p)$  é non nula, entón  $T_{\lambda_i}(p)$  é un subespazo real de  $T_p\bar{M}^n(c)$ , isto é,  $JT_{\lambda_i}(p) \subset T_{\lambda_i}^\perp(p)$ , onde  $T_{\lambda_i}^\perp(p)$  é o complemento ortogonal de  $T_{\lambda_i}(p)$  en  $T_p\bar{M}^n(c)$ .*

*Demostración.* No Lema 4.1 tomemos  $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k$ . Entón  $\bar{R}_{XYZ\xi} = 0$  para todo  $X, Y, Z \in \Gamma(T_{\lambda_i})$ . Collendo  $Z = X$ , obtense que  $\langle JX, Y \rangle \langle X, J\xi \rangle = 0$  para todo  $X, Y \in \Gamma(T_{\lambda_i})$ , de onde se segue que  $0 = -\frac{4}{c} \langle X, J\xi \rangle \bar{R}_{XYZ\xi} = \langle JY, Z \rangle \langle X, J\xi \rangle^2$ , para todo  $X, Y, Z \in \Gamma(T_{\lambda_i})$ . Así pois, se nun punto  $p \in M$ , a proxección ortogonal de  $J\xi_p$  sobre  $T_{\lambda_i}(p)$  é non trivial, existe un campo  $X \in \Gamma(T_{\lambda_i})$  tal que  $\langle X_p, J\xi_p \rangle \neq 0$ , polo cal se ha de ter que  $\langle JY_p, Z_p \rangle = 0$  para todo par de vectores  $Y_p, Z_p \in T_{\lambda_i}(p)$ . É dicir,  $JT_{\lambda_i}(p) \subset T_{\lambda_i}^\perp(p)$ .  $\square$

**Lema 4.3.** *Para todo  $X, Y \in \Gamma(T_{\lambda_i})$  e  $Z \in \Gamma(T_{\lambda_j})$  con  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , tense que*

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{c}{4(\lambda_i - \lambda_j)} (\langle JY, Z \rangle \langle X, J\xi \rangle + \langle JX, Y \rangle \langle Z, J\xi \rangle + 2 \langle JX, Z \rangle \langle Y, J\xi \rangle).$$

*Demostración.* Dedúcese de xeito inmediato do Lema 4.1, sen máis que pór  $\lambda_i = \lambda_k$  e intercambiando os campos  $Y$  e  $Z$ .  $\square$

**Lema 4.4.** *Para cada par de campos de vectores unitarios  $X \in \Gamma(T_{\lambda_i})$  e  $Y \in \Gamma(T_{\lambda_j})$ , con  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , temos:*

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_j - \lambda_i)(-c - 4\lambda_i\lambda_j - 2c \langle JX, Y \rangle^2 + 8 \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X \rangle - 4 \langle \nabla_X X, \nabla_Y Y \rangle) \\ &\quad - 4c \langle JX, Y \rangle (X \langle Y, J\xi \rangle + Y \langle X, J\xi \rangle) \\ &\quad - c \langle X, J\xi \rangle (3Y \langle JX, Y \rangle + \langle \nabla_Y X, JY \rangle - 2 \langle \nabla_X Y, JY \rangle) \\ &\quad - c \langle Y, J\xi \rangle (3X \langle JX, Y \rangle - \langle \nabla_X Y, JX \rangle + 2 \langle \nabla_Y X, JX \rangle). \end{aligned}$$

*Demostración.* Da ecuación de Gauß obtemos que:

$$R_{XY YX} = \lambda_i \lambda_j + \frac{c}{4} + \frac{3c}{4} \langle JX, Y \rangle^2.$$

Por outra banda, a definición do tensor de curvatura  $R$  de  $M$  implica que

$$\begin{aligned} R_{XY YX} &= \langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X, Y]} Y, X \rangle \\ &= X \langle \nabla_Y Y, X \rangle - \langle \nabla_X X, \nabla_Y Y \rangle - Y \langle \nabla_X Y, X \rangle + \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Y, X \rangle. \end{aligned}$$

Usando o Lema 4.3 temos que

$$\begin{aligned} X \langle \nabla_Y Y, X \rangle &= \frac{3c}{4(\lambda_i - \lambda_j)} (\langle Y, J\xi \rangle X \langle JX, Y \rangle + \langle JX, Y \rangle X \langle Y, J\xi \rangle), \\ Y \langle \nabla_X Y, X \rangle &= \frac{3c}{4(\lambda_j - \lambda_i)} (\langle X, J\xi \rangle Y \langle JX, Y \rangle + \langle JX, Y \rangle Y \langle X, J\xi \rangle). \end{aligned}$$

A ecuación de Codazzi, o feito de que as derivadas do operador de configuración sexan operadores autoadxuntos e a identidade de Bianchi alxébrica permítenos escribir:

$$\begin{aligned} (\lambda_j - \lambda_i) \langle \nabla_{[X, Y]} Y, X \rangle &= \langle (\nabla_{[X, Y]} S) Y, X \rangle = \langle (\nabla_Y S) [X, Y], X \rangle + \bar{R}_{[X, Y] Y X \xi} \\ &= \langle (\nabla_Y S) X, \nabla_X Y \rangle - \langle (\nabla_Y S) X, \nabla_Y X \rangle + \bar{R}_{[X, Y] Y X \xi} \\ &= \langle (\nabla_Y S) X, \nabla_X Y \rangle - \langle (\nabla_X S) Y, \nabla_Y X \rangle - \bar{R}_{Y X \nabla_Y X \xi} + \bar{R}_{[X, Y] Y X \xi} \\ &= (\lambda_i - \lambda_j) \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X \rangle + \bar{R}_{\nabla_X Y Y X \xi} + \bar{R}_{X \nabla_Y X Y \xi}. \end{aligned}$$

Agora, a definición do tensor de curvatura de  $\mathbb{C}H^n$  xunto coa ecuación de Weingarten implican:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\nabla_X Y Y X \xi} + \bar{R}_{X \nabla_Y X Y \xi} &= \frac{c}{4} \left( (\lambda_i - \lambda_j) \langle JX, Y \rangle^2 + \langle JX, Y \rangle (X \langle Y, J\xi \rangle + Y \langle X, J\xi \rangle) \right. \\ &\quad + \langle X, J\xi \rangle (\langle \nabla_Y X, JY \rangle - 2 \langle \nabla_X Y, JY \rangle) \\ &\quad \left. - \langle Y, J\xi \rangle (\langle \nabla_X Y, JX \rangle - 2 \langle \nabla_Y X, JX \rangle) \right). \end{aligned}$$

Todas estas relacións xuntas permiten concluír a demostración do lema.  $\square$

## 4.2. Proba do Teorema Principal

Nesta sección comezaremos supondo que a hipersuperficie  $M$  é orientable. Polo tanto, podemos considerar sobre  $M$  un campo unitario normal global  $\xi$ . Imos estudar o caso en que o campo  $J\xi_p$  ten proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvaturas principais  $T_{\mu_1(p)}(p)$  e  $T_{\mu_2(p)}(p)$ , para todo punto  $p \in M$ . En particular, isto implica que  $g \geq 2$ . Posto que  $M$  é conexas e ten curvaturas principais constantes, e as funcións  $\mu_1, \mu_2: M \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas, séguese que ambas funcións son constantes. Por tanto, o campo tanxente  $J\xi$  ten proxección non trivial sobre exactamente dúas distribucións de curvaturas principais  $T_{\mu_1}$  e  $T_{\mu_2}$ . De aquí en diante suporemos, pois non é restritivo así facelo, que as dúas curvaturas principais asociadas a tales distribucións son  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

Poñamos, por tanto,  $J\xi = b_1 U_1 + b_2 U_2$ , con  $U_i \in \Gamma(T_{\lambda_i})$ ,  $i = 1, 2$  campos unitarios,  $b_i$  función diferenciable sobre  $M$  estrictamente positiva, para  $i = 1, 2$ . Verifícase entón que  $b_1^2 + b_2^2 = 1$ .

### 4.2.1. Un lema a nivel alxébrico

A hipótese de que cada vector  $J\xi_p$  ten proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvaturas principais, para cada  $p \in M$ , permite deducir xa algunha consecuencia traballando exclusivamente a nivel alxébrico no espazo vectorial  $T_p \bar{M}^n(c)$ .

**Lema 4.5.** *Sexa  $p \in M$  tal que  $J\xi_p = b_1 u_1 + b_2 u_2$  para certos vectores unitarios  $u_i \in T_{\lambda_i}(p)$  e certos números reais  $b_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ .*

*Entón  $g \geq 3$ ,  $\langle Ju_1, u_2 \rangle = 0$  e existe un vector unitario  $a \in \bigoplus_{k=3}^g T_{\lambda_k}(p)$  tal que*

$$\begin{aligned} Ja &= b_2 u_1 - b_1 u_2, \\ Ju_i &= (-1)^i b_j a - b_i \xi_p, \quad i, j \in \{1, 2\}, i \neq j. \end{aligned}$$

*En particular, o subespazo  $\mathbb{R}\xi_p \oplus \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2 \oplus \mathbb{R}a$  de  $T_p \bar{M}^n(c)$  é complexo.*

*Demostración.* Dacordo co Lema 4.2, os subespazos  $T_{\lambda_1}(p)$  e  $T_{\lambda_2}(p)$  son reais. Por tanto:

$$Ju_i \in T_{\lambda_j}(p) \oplus \left( \bigoplus_{k=3}^g T_{\lambda_k}(p) \right), \quad i, j \in \{1, 2\}, i \neq j.$$

Dito doutro xeito: existen dous vectores  $\omega_{12} \in T_{\lambda_2}(p) \ominus \mathbb{R}u_2$ ,  $\omega_{21} \in T_{\lambda_1}(p) \ominus \mathbb{R}u_1$  e  $2(g-2)$  vectores  $\omega_{ik} \in T_{\lambda_k}(p)$ , con  $i \in \{1, 2\}$  e  $k \in \{3, \dots, g\}$ , tales que:

$$\begin{aligned} Ju_1 &= \langle Ju_1, u_2 \rangle u_2 + \omega_{12} + \sum_{k=3}^g \omega_{1k} - b_1 \xi_p, \\ Ju_2 &= \langle Ju_2, u_1 \rangle u_1 + \omega_{21} + \sum_{k=3}^g \omega_{2k} - b_2 \xi_p. \end{aligned}$$

Tendo en conta estas expresións, podemos calcular o seguinte:

$$\begin{aligned} -\xi_p &= J^2 \xi_p = J(J \xi_p) = b_1 Ju_1 + b_2 Ju_2 \\ &= b_2 (\langle Ju_2, u_1 \rangle u_1 + \omega_{21}) + b_1 (\langle Ju_1, u_2 \rangle u_2 + \omega_{12}) + \sum_{k=3}^g (b_1 \omega_{1k} + b_2 \omega_{2k}) - \xi_p. \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} 0 &= \langle Ju_1, u_2 \rangle = -\langle Ju_2, u_1 \rangle, \\ 0 &= \omega_{21}, \\ 0 &= \omega_{12}, \\ 0 &= b_1 \omega_{1k} + b_2 \omega_{2k}, \quad k = 3, \dots, g. \end{aligned}$$

E, consecuentemente:

$$(4.2) \quad Ju_i = \sum_{k=3}^g \omega_{ik} - b_i \xi_p, \quad i = 1, 2.$$

De aquí séguese que non se pode dar o caso  $g = 2$ , pois entón a norma de  $Ju_i$  (que sabemos que é 1) sería  $b_i$ , que é estrictamente menor ca 1. Entón  $g \geq 3$ .

Para cada  $k \in \{3, \dots, g\}$  tomemos  $a_k$  un vector unitario tal que:  $a_k \in \mathbb{R}\omega_{1k}$ , se  $\omega_{1k} \neq 0$ ; e un vector unitario arbitrario  $a_k \in T_{\lambda_k}(p)$  en caso de que  $\omega_{1k}$  sexa nulo. Así pois, podemos pór  $\omega_{1k} = f_k a_k$  e  $\omega_{2k} = g_k a_k$ , para certos números reais  $f_k$  e  $g_k$ , para todo  $k = 3, \dots, g$ . Entón as dúas ecuacións (4.2) podémolas reescribir así:

$$(4.3) \quad Ju_1 = \sum_{k=3}^g f_k a_k - b_1 \xi_p,$$

$$(4.4) \quad Ju_2 = \sum_{k=3}^g g_k a_k - b_2 \xi_p.$$

E as relacións (4.1) convértense en:

$$0 = b_1 f_k a_k + b_2 g_k a_k, \quad k = 3, \dots, g.$$

Co cal temos que:

$$0 = b_1 f_k + b_2 g_k, \quad k = 3, \dots, g.$$

Posto que  $b_2 \neq 0 \neq b_1$ , podemos definir  $h_k = \frac{g_k}{b_1} = -\frac{f_k}{b_2}$  para cada  $k \in \{3, \dots, g\}$ . Reescribimos as ecuacións (4.3) e (4.4) do seguinte xeito:

$$\begin{aligned} Ju_1 &= -b_2 \left( \sum_{k=3}^g h_k a_k \right) - b_1 \xi_p, \\ Ju_2 &= b_1 \left( \sum_{k=3}^g h_k a_k \right) - b_2 \xi_p. \end{aligned}$$

Definimos o vector  $a = \sum_{k=3}^g h_k a_k \in \bigoplus_{k=3}^g T_{\lambda_k}(p)$ , co cal  $Ju_1 = -b_2 a - b_1 \xi_p$  e  $Ju_2 = b_1 a - b_2 \xi_p$ . Ademais, tendo en conta esta última ecuación obtemos:

$$\begin{aligned} b_1 Ja &= J^2 u_2 + b_2 J \xi_p = -u_2 + b_2 (b_1 u_1 + b_2 u_2) = b_1 b_2 u_1 + (-1 + b_2^2) u_2 \\ &= b_1 b_2 u_1 - b_1^2 u_2, \end{aligned}$$

de onde concluímos que  $Ja = b_2 u_1 - b_1 u_2$ , co cal  $Ja$  ten norma  $b_2^2 + (-b_1)^2 = 1$  e, entón,  $a$  tamén é unitario. Así finalizamos a demostración do lema.  $\square$

Séguese do Lema 4.5 que existe un campo de vectores unitario  $A \in \Gamma(\bigoplus_{k=3}^g T_{\lambda_k})$  tal que:

$$\begin{aligned} JU_i &= (-1)^i b_j A - b_i \xi, \quad i, j \in \{1, 2\}, i \neq j, \\ JA &= b_2 U_1 - b_1 U_2, \\ \langle JU_1, U_2 \rangle &= 0, \end{aligned}$$

onde, recordemos,  $U_i \in \Gamma(T_{\lambda_i})$ ,  $i = 1, 2$ , son campos unitarios en  $M$ , e  $b_1, b_2$  son funcións positivas en  $M$  verificando  $b_1^2 + b_2^2 = 1$ . O campo de vectores  $A$  pode ser expresado do seguinte xeito:

$$A = \sum_{k=3}^g V_k,$$

para  $g - 2$  campos diferenciables  $V_k \in \Gamma(T_{\lambda_k})$ ,  $k = 3, \dots, g$ . Ademais, das igualdades anteriores séguese que:

$$\langle U_i, JV_k \rangle = (-1)^j b_j, \quad i, j \in \{1, 2\}; i \neq j; k = 3, \dots, g.$$

Estas relacións, xunto coa xa mencionada antes do lema

$$J\xi = b_1 U_1 + b_2 U_2,$$

serán usadas a miúdo no que segue, sen refirirse a elas explicitamente. Ademais:

$$\mathfrak{D} = TM \ominus (\mathbb{R}U_1 \oplus \mathbb{R}U_2 \oplus \mathbb{R}A) = (T_{\lambda_1} \ominus \mathbb{R}U_1) \oplus (T_{\lambda_2} \ominus \mathbb{R}U_2) \oplus \left( \left( \bigoplus_{k=3}^g T_{\lambda_k} \right) \ominus \mathbb{R}A \right)$$

é unha distribución complexa sobre  $M$ .

### 4.2.2. O campo de vectores $A$

O obxectivo deste apartado é o de mostrar que todos os campos  $V_k$ ,  $k = 3, \dots, g$ , son cero excepto exactamente un e, polo tanto, que podemos asumir por exemplo que  $A \in \Gamma(T_{\lambda_3})$ .

Comecemos co seguinte lema, no cal calculamos algunha derivada covariante que precisaremos máis adiante.

**Lema 4.6.** *Para  $i, j \in \{1, 2\}$  con  $i \neq j$ , verifícanse as seguintes relacións:*

$$(4.5) \quad \nabla_{U_i} U_i = \sum_{k=3}^g (-1)^j \frac{3cb_1 b_2}{4(\lambda_k - \lambda_i)} V_k,$$

$$(4.6) \quad \nabla_{U_i} U_j = \sum_{k=3}^g (-1)^j \left( \lambda_i - \frac{3cb_i^2}{4(\lambda_k - \lambda_i)} \right) V_k.$$

*Demostración.* Sexan  $W_i \in \Gamma(T_{\lambda_i} \ominus \mathbb{R}U_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $W_k \in \Gamma(T_{\lambda_k} \ominus \mathbb{R}V_k)$ ,  $k = 3, \dots, g$  campos de vectores diferenciables arbitrarios e  $k \in \{3, \dots, g\}$  tamén arbitrario.

Probemos a ecuación (4.5).

Como  $U_i$  ten norma constante, tense que  $\langle \nabla_{U_i} U_i, U_i \rangle = 0$ . Do Lema 4.3 obtemos que:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{U_i} U_i, U_j \rangle &= \langle \nabla_{U_i} U_i, W_j \rangle = \langle \nabla_{U_i} U_i, W_k \rangle = 0, \\ \langle \nabla_{U_i} U_i, V_k \rangle &= (-1)^j \frac{3cb_i b_j}{4(\lambda_k - \lambda_i)}. \end{aligned}$$

Falta por calcular  $\langle \nabla_{U_i} U_i, W_i \rangle$ . Fagámolo así:

Tense que  $\langle \bar{\nabla}_{U_i} J\xi, W_i \rangle = \langle J\bar{\nabla}_{U_i} \xi, W_i \rangle = -\langle JSU_i, W_i \rangle = -\lambda_i \langle JU_i, W_i \rangle$ , o cal é cero por ser  $T_{\lambda_i}$  real. Usando isto temos que:

$$0 = U_i \langle W_i, J\xi \rangle = \langle \bar{\nabla}_{U_i} W_i, J\xi \rangle + \langle \bar{\nabla}_{U_i} J\xi, W_i \rangle = b_i \langle \nabla_{U_i} W_i, U_i \rangle + b_j \langle \nabla_{U_i} W_i, U_j \rangle.$$

Pero, de novo polo Lema 4.3,  $\langle \nabla_{U_i} W_i, U_j \rangle = 0$ . Por tanto, como  $b_i \neq 0$ , isto implica que  $\langle \nabla_{U_i} W_i, U_i \rangle = 0$ , de onde se segue (4.5).

Demostremos agora (4.6).

Como  $U_j$  ten norma constante, temos que  $\langle \nabla_{U_i} U_j, U_j \rangle = 0$ . De (4.5) dedúcese que  $\langle \nabla_{U_i} U_j, U_i \rangle = 0$ , e o Lema 4.3 dinos que  $\langle \nabla_{U_i} U_j, W_i \rangle = -\langle \nabla_{U_i} W_i, U_j \rangle$  vale 0.

Sexa  $\nu \in \{j, 3, \dots, g\}$ . Tendo en conta (4.5) e que  $\langle \bar{\nabla}_{U_i} J\xi, W_\nu \rangle = \langle J\bar{\nabla}_{U_i} \xi, W_\nu \rangle = -\langle JSU_i, W_\nu \rangle = -\lambda_i \langle JU_i, W_\nu \rangle = 0$  obtemos:

$$0 = U_i \langle W_\nu, J\xi \rangle = \langle \bar{\nabla}_{U_i} W_\nu, J\xi \rangle + \langle \bar{\nabla}_{U_i} J\xi, W_\nu \rangle = b_j \langle \nabla_{U_i} W_\nu, U_j \rangle,$$

de onde  $\langle \nabla_{U_i} U_j, W_\nu \rangle = 0$ .

Calculemos finalmente  $\langle \nabla_{U_i} U_j, V_k \rangle$ . Verifícase que

$$\begin{aligned}
0 &= U_i \langle J\xi, V_k \rangle = \langle \bar{\nabla}_{U_i} J\xi, V_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_{U_i} V_k, J\xi \rangle \\
&= \langle J\bar{\nabla}_{U_i} \xi, V_k \rangle + b_i \langle \nabla_{U_i} V_k, U_i \rangle + b_j \langle \nabla_{U_i} V_k, U_j \rangle \\
&= -\langle JSU_i, V_k \rangle - b_i \langle \nabla_{U_i} U_i, V_k \rangle - b_j \langle \nabla_{U_i} U_j, V_k \rangle \\
&= -\lambda_i \langle JU_i, V_k \rangle - b_i (-1)^j \frac{3cb_i b_j}{4(\lambda_k - \lambda_i)} - b_j \langle \nabla_{U_i} U_j, V_k \rangle \\
&= (-1)^j \lambda_i b_j - (-1)^j \frac{3cb_i^2 b_j}{4(\lambda_k - \lambda_i)} - b_j \langle \nabla_{U_i} U_j, V_k \rangle.
\end{aligned}$$

E de aquí concluimos que

$$\langle \nabla_{U_i} U_j, V_k \rangle = (-1)^j \left( \lambda_i - \frac{3cb_i^2}{4(\lambda_k - \lambda_i)} \right),$$

co cal queda probado (4.6).  $\square$

**Corolario 4.7.** *Para cada  $k \in \{3, \dots, g\}$  e para cada  $p \in M$  tales que  $(V_k)_p \neq 0$ , as curvaturas principais  $\lambda_1, \dots, \lambda_g$  e as funcións  $b_1$  e  $b_2$  avaliadas no punto  $p$  satisfán a ecuación seguinte:*

$$0 = \frac{c}{4} + \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_k) + \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_k) + \frac{3c(b_1(p))^2(\lambda_2 - \lambda_k)}{4(\lambda_1 - \lambda_k)} + \frac{3c(b_2(p))^2(\lambda_1 - \lambda_k)}{4(\lambda_2 - \lambda_k)}.$$

*Demostración.* Sexan  $p \in M$  e  $k \in \{3, \dots, g\}$  tales que  $(V_k)_p \neq 0$ . Entón nunha veciñanza aberta de  $p$  o campo  $V_k$  é non nulo. Realizamos as seguintes operacións nesa veciñanza aberta.

Da expresión para a curvatura en  $\bar{M}^n(c)$  e mais do Lema 4.1 aplicado ós campos  $U_1, U_2$  e  $V_k$  obtemos:

$$-\frac{c}{4} = \bar{R}_{U_1 U_2 V_k \xi} = (\lambda_2 - \lambda_k) \langle \nabla_{U_1} U_2, V_k \rangle - (\lambda_1 - \lambda_k) \langle \nabla_{U_2} U_1, V_k \rangle.$$

As ecuacións (4.6) permítenos concluír.  $\square$

**Proposición 4.8.** *Os campos  $V_k$ ,  $k = 3, \dots, g$ , son todos nulos agás un deles, que é unitario. Noutras palabras,  $A \in \Gamma(T_{\lambda_k})$  para un certo  $k \in \{3, \dots, g\}$ .*

*Demostración.* Supoñamos que existise un punto  $p \in M$  e dous enteiros distintos  $r, s \in \{3, \dots, g\}$  tales que os vectores tanxentes  $(V_r)_p$  e  $(V_s)_p$  fosen non nulos. En consecuencia, existe unha veciñanza aberta de  $p$  tal que para todo punto  $q$  nela, os vectores  $(V_r)_q$  e  $(V_s)_q$  son tamén non nulos. As operacións que realizaremos a continuación entenderase que se levan a cabo nesa veciñanza aberta do punto  $p$ .



Dacordo co Corolario 4.7 e coa relación  $b_1^2 + b_2^2 = 1$  obtemos o seguinte sistema lineal nas variables  $\{b_1^2, b_2^2\}$ :

$$(4.7) \quad \left. \begin{aligned} \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_r)}{4(\lambda_1 - \lambda_r)} b_1^2 + \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_r)}{4(\lambda_2 - \lambda_r)} b_2^2 &= -\frac{c}{4} + \lambda_1(\lambda_r - \lambda_2) + \lambda_2(\lambda_r - \lambda_1) \\ \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_s)}{4(\lambda_1 - \lambda_s)} b_1^2 + \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_s)}{4(\lambda_2 - \lambda_s)} b_2^2 &= -\frac{c}{4} + \lambda_1(\lambda_s - \lambda_2) + \lambda_2(\lambda_s - \lambda_1) \\ b_1^2 + b_2^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Tal sistema debe ser compatible. Supoñamos por un momento que é indeterminado. Entón todos os menores de orde 2 da matriz ampliada do sistema deben anularse. En particular, o menor formado pola primeira e a terceira filas da matriz do sistema, e o menor formado pola segunda e a terceira filas da matriz do sistema deben anularse:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_r)}{4(\lambda_1 - \lambda_r)} & \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_r)}{4(\lambda_2 - \lambda_r)} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3c \frac{(\lambda_2 - \lambda_r)^2 - (\lambda_1 - \lambda_r)^2}{4(\lambda_1 - \lambda_r)(\lambda_2 - \lambda_r)} \\ &= 3c \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_r)}{4(\lambda_1 - \lambda_r)(\lambda_2 - \lambda_r)}, \\ 0 &= \begin{vmatrix} \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_s)}{4(\lambda_1 - \lambda_s)} & \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_s)}{4(\lambda_2 - \lambda_s)} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3c \frac{(\lambda_2 - \lambda_s)^2 - (\lambda_1 - \lambda_s)^2}{4(\lambda_1 - \lambda_s)(\lambda_2 - \lambda_s)} \\ &= 3c \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_s)}{4(\lambda_1 - \lambda_s)(\lambda_2 - \lambda_s)}. \end{aligned}$$

Pero, posto que partimos do suposto de que as  $g$  curvaturas principais de  $M$  son todas distintas, dedúcese que  $\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_r = 0 = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_s$ , de onde  $\lambda_r = \lambda_s$ , o cal é unha contradición co suposto que vimos de citar.

Polo tanto, o sistema ha de ser compatible e determinado. Isto implica que se pode resolver para atopar unha expresión de  $b_1^2$  e  $b_2^2$  en función de  $c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_r, \lambda_s$ . Así pois,  $b_1^2$  e  $b_2^2$  son constantes e, entón,  $b_1$  e  $b_2$  tamén.

Tendo en conta que  $U_i, i = 1, 2$ , ten norma constante, verificase entón que, para cada  $i, j \in \{1, 2\}, j \neq i$  e  $k \in \{r, s\}$

$$\begin{aligned} 0 &= V_k(b_i) = V_k \langle U_i, J\xi \rangle = \langle \bar{\nabla}_{V_k} U_i, J\xi \rangle + \langle U_i, \bar{\nabla}_{V_k} J\xi \rangle \\ &= b_i \langle \nabla_{V_k} U_i, U_i \rangle + b_j \langle \nabla_{V_k} U_i, U_j \rangle + \langle U_i, J\bar{\nabla}_{V_k} \xi \rangle = b_j \langle \nabla_{V_k} U_i, U_j \rangle - \langle U_i, JSV_k \rangle \\ &= b_j \langle \nabla_{V_k} U_i, U_j \rangle - \lambda_k \langle U_i, JV_k \rangle = b_j \langle \nabla_{V_k} U_i, U_j \rangle - (-1)^j b_j \lambda_k, \end{aligned}$$

e, por tanto,  $\langle \nabla_{V_k} U_i, U_j \rangle = (-1)^j \lambda_k$ . Usando estas relacións e (4.6), o Lema 4.1 aplicado ós campos  $V_k, U_1, U_2$  ( $k = r, s$ ) permítenos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{c}{4}(2b_2^2 - b_1^2) &= \bar{R}_{V_k U_1 U_2 \xi} = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \nabla_{V_k} U_1, U_2 \rangle - (\lambda_k - \lambda_2) \langle \nabla_{U_1} V_k, U_2 \rangle \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_k + (\lambda_k - \lambda_2) \left( \lambda_1 - \frac{3cb_1^2}{4(\lambda_k - \lambda_1)} \right), \end{aligned}$$

e así obtemos as seguintes dúas novas ecuacións lineais nas incógnitas  $b_1^2$  e  $b_2^2$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{c}{4} - \frac{3c(\lambda_r - \lambda_2)}{4(\lambda_r - \lambda_1)} \right) b_1^2 - \frac{c}{2} b_2^2 &= (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_r + \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_r), \\ \left( \frac{c}{4} - \frac{3c(\lambda_s - \lambda_2)}{4(\lambda_s - \lambda_1)} \right) b_1^2 - \frac{c}{2} b_2^2 &= (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_s + \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_s). \end{aligned}$$

Agora podemos considerar un novo sistema lineal nas incógnitas  $b_1^2$  e  $b_2^2$ , formado polas ecuacións en (4.7) e mais polas ecuacións que vimos de deducir:

$$(4.8) \quad \left. \begin{aligned} \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_r)}{4(\lambda_1 - \lambda_r)} b_1^2 + \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_r)}{4(\lambda_2 - \lambda_r)} b_2^2 &= -\frac{c}{4} + \lambda_2(\lambda_r - \lambda_1) + \lambda_1(\lambda_r - \lambda_2) \\ \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_s)}{4(\lambda_1 - \lambda_s)} b_1^2 + \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_s)}{4(\lambda_2 - \lambda_s)} b_2^2 &= -\frac{c}{4} + \lambda_2(\lambda_s - \lambda_1) + \lambda_1(\lambda_s - \lambda_2) \\ \left( \frac{c}{4} - \frac{3c(\lambda_r - \lambda_2)}{4(\lambda_r - \lambda_1)} \right) b_1^2 - \frac{c}{2} b_2^2 &= \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_r) + (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_r \\ \left( \frac{c}{4} - \frac{3c(\lambda_s - \lambda_2)}{4(\lambda_s - \lambda_1)} \right) b_1^2 - \frac{c}{2} b_2^2 &= \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_s) + (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_s \\ b_1^2 + b_2^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Tal sistema ha de ser compatible e determinado, polo cal os menores de orde 3 da matriz ampliada débense anular. A continuación amosamos os menores formados polas filas 1, 3 e 5, as filas 2,4 e 5, e as filas 3,4 e 5, respectivamente:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_r)}{4(\lambda_1 - \lambda_r)} & \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_r)}{4(\lambda_2 - \lambda_r)} & -\frac{c}{4} + \lambda_2(\lambda_r - \lambda_1) + \lambda_1(\lambda_r - \lambda_2) \\ \frac{c}{4} - \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_r)}{4(\lambda_1 - \lambda_r)} & -\frac{c}{2} & \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_r) + (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (-12\lambda_r^2 + 8\lambda_1\lambda_r + 8\lambda_2\lambda_r + c - 4\lambda_1\lambda_2)}{16(\lambda_1 - \lambda_r)(\lambda_r - \lambda_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_s)}{4(\lambda_1 - \lambda_s)} & \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_s)}{4(\lambda_2 - \lambda_s)} & -\frac{c}{4} + \lambda_2(\lambda_s - \lambda_1) + \lambda_1(\lambda_s - \lambda_2) \\ \frac{c}{4} - \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_s)}{4(\lambda_1 - \lambda_s)} & -\frac{c}{2} & \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_s) + (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_s \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (-12\lambda_s^2 + 8\lambda_1\lambda_s + 8\lambda_2\lambda_s + c - 4\lambda_1\lambda_2)}{16(\lambda_1 - \lambda_s)(\lambda_s - \lambda_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} \frac{c}{4} - \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_r)}{4(\lambda_1 - \lambda_r)} & -\frac{c}{2} & \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_r) + (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_r \\ \frac{c}{4} - \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_s)}{4(\lambda_1 - \lambda_s)} & -\frac{c}{2} & \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_s) + (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_s \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{3c(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_r - \lambda_s)(4\lambda_1^2 - 4\lambda_r\lambda_1 - 4\lambda_s\lambda_1 + c + 2\lambda_2\lambda_r + 2\lambda_2\lambda_s)}{8(\lambda_1 - \lambda_r)(\lambda_1 - \lambda_s)}.
\end{aligned}$$

Dado que asumimos que as  $g$  curvaturas principais de  $M$  son distintas dúas a dúas, dedúcense as seguintes tres ecuacións:

$$(4.9) \quad 0 = -12\lambda_r^2 + 8\lambda_1\lambda_r + 8\lambda_2\lambda_r + c - 4\lambda_1\lambda_2,$$

$$(4.10) \quad 0 = -12\lambda_s^2 + 8\lambda_1\lambda_s + 8\lambda_2\lambda_s + c - 4\lambda_1\lambda_2,$$

$$(4.11) \quad 0 = 4\lambda_1^2 - 4\lambda_r\lambda_1 - 4\lambda_s\lambda_1 + c + 2\lambda_2\lambda_r + 2\lambda_2\lambda_s.$$

Restando (4.10) de (4.9) obtemos

$$0 = 4(2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_r - 3\lambda_s)(\lambda_r - \lambda_s),$$

de onde se deduce que  $\lambda_r + \lambda_s = \frac{2}{3}(\lambda_1 + \lambda_2)$ . Tendo isto en conta, a ecuación (4.11) pódese reescribir así:

$$0 = 4\lambda_1^2 - 4(\lambda_r + \lambda_s)\lambda_1 + c + 2\lambda_2(\lambda_r + \lambda_s) = \frac{1}{3}(4\lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_1 + 4\lambda_2^2 + 3c),$$

polo cal:

$$0 = 4\lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_1 + 4\lambda_2^2 + 3c.$$

Pero o discriminante de (4.9) e (4.10) como ecuacións de segundo grao nas incógnitas  $\lambda_r$  e  $\lambda_s$ , respectivamente, resulta ser:

$$16(4\lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_1 + 4\lambda_2^2 + 3c),$$

e, por tanto, tal discriminante anúlase. Isto implica que  $\lambda_r = \lambda_s$ , o cal non pode ser, chegando así a un absurdo que xurdiu de ter suposto a existencia dun punto  $p \in M$  para o cal existisen dous índices  $r, s \in \{3, \dots, g\}$  tales que os vectores  $(V_r)_p$  e  $(V_s)_p$  fosen non nulos.

Por tanto, para cada punto  $p \in M$ ,  $A_p$  é un autovector unitario do operador de configuración en  $p$ , asociado a unha certa curvatura principal  $\lambda_k(p)$ . Posto que  $A$  é un campo continuo e  $M$  é conexas, tal curvatura principal asociada a  $A_p$  non depende do punto  $p$  en consideración. En consecuencia,  $A \in \Gamma(T_{\lambda_k})$  para un certo  $k \in \{3, \dots, g\}$ , tal e como se quería probar.  $\square$

Dacordo coa proposición que vimos de demostrar, de aquí en diante suporemos que  $A \in \Gamma(T_{\lambda_3})$ , reordenando as curvaturas principais de  $M$  se fose preciso para facer tal suposición.

### 4.2.3. Algunhas propiedades dos espazos de curvaturas principais

Neste apartado determinaremos as funcións  $b_1$  e  $b_2$ , probaremos certas relacións entre as curvaturas principais e veremos que as distribucións  $T_{\lambda_k}$ , con  $k \in \{4, \dots, g\}$ , son reais.

Ó igual que antes, comezamos calculando algunhas derivadas covariantes.

**Lema 4.9.** *Para  $i, j \in \{1, 2\}$  con  $i \neq j$ , verifícanse as seguintes relacións:*

$$(4.12) \quad \nabla_{U_i} U_i = (-1)^j \frac{3cb_1 b_2}{4(\lambda_3 - \lambda_i)} A,$$

$$(4.13) \quad \nabla_{U_i} U_j = (-1)^j \left( \lambda_i - \frac{3cb_i^2}{4(\lambda_3 - \lambda_i)} \right) A,$$

$$(4.14) \quad \nabla_{U_i} A = (-1)^i \frac{3cb_1 b_2}{4(\lambda_3 - \lambda_i)} U_i + (-1)^i \left( \lambda_i - \frac{3cb_i^2}{4(\lambda_3 - \lambda_i)} \right) U_j,$$

$$(4.15) \quad \nabla_A U_i = \frac{(-1)^j}{\lambda_i - \lambda_j} \left( \frac{c}{4}(2b_j^2 - b_i^2) + (\lambda_j - \lambda_3) \left( \lambda_i - \frac{3cb_i^2}{4(\lambda_3 - \lambda_i)} \right) \right) U_j,$$

$$(4.16) \quad \nabla_A A = 0.$$

*Demostración.* As igualdades (4.12) e (4.13) séguense inmediatamente das igualdades (4.5) e (4.6), respectivamente.

Sexan  $W_i \in \Gamma(T_{\lambda_i} \ominus \mathbb{R}U_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $W_3 \in \Gamma(T_{\lambda_3} \ominus \mathbb{R}A)$  e  $W_k \in \Gamma(T_{\lambda_k})$ ,  $k = 4, \dots, g$ , campos de vectores diferenciables arbitrarios e  $k \in \{4, \dots, g\}$  tamén arbitrario.

Probemos (4.14).

Posto que  $A$  ten norma constante, temos  $\langle \nabla_{U_i} A, A \rangle = 0$ . Sexa  $\nu \in \{1, \dots, g\}$ . Temos entón:

$$\begin{aligned} 0 &= U_i \langle JU_i, W_\nu \rangle = \langle \bar{\nabla}_{U_i} JU_i, W_\nu \rangle + \langle JU_i, \bar{\nabla}_{U_i} W_\nu \rangle \\ &= -\langle \bar{\nabla}_{U_i} U_i, JW_\nu \rangle + \langle JU_i, \bar{\nabla}_{U_i} W_\nu \rangle. \end{aligned}$$

Debido a que  $\mathfrak{D}$  é  $J$ -invariante e a (4.12), o primeiro termo anúlase. No segundo termo, substituíndo  $JU_i$  por  $(-1)^i b_j A - b_i \xi$ , obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle JU_i, \bar{\nabla}_{U_i} W_\nu \rangle = (-1)^i b_j \langle A, \nabla_{U_i} W_\nu \rangle - b_i \langle \xi, \bar{\nabla}_{U_i} W_\nu \rangle \\ &= (-1)^i b_j \langle A, \nabla_{U_i} W_\nu \rangle + b_i \langle \bar{\nabla}_{U_i} \xi, W_\nu \rangle \\ &= (-1)^i b_j \langle A, \nabla_{U_i} W_\nu \rangle - b_i \langle SU_i, W_\nu \rangle \\ &= (-1)^i b_j \langle A, \nabla_{U_i} W_\nu \rangle - \lambda_i b_i \langle U_i, W_\nu \rangle = (-1)^i b_j \langle A, \nabla_{U_i} W_\nu \rangle, \end{aligned}$$

de onde  $\langle \nabla_{U_i} A, W_\nu \rangle = 0$ . Por tanto,  $\nabla_{U_i} A = \langle \nabla_{U_i} A, U_i \rangle U_i + \langle \nabla_{U_i} A, U_j \rangle U_j$ , o cal nos permite determinar (4.14) a partir de (4.12) e (4.13).

Demostremos agora (4.15).

Como  $U_i$  ten norma constante, temos  $\langle \nabla_A U_i, U_i \rangle = 0$ . Do Lema 4.3 séguese que  $\langle \nabla_A U_i, A \rangle = -\langle \nabla_A A, U_i \rangle = 0$ . Sexa  $\nu \in \{j\} \cup \{3, \dots, g\}$ . Polo Lema 4.1 e tendo en conta que  $\mathfrak{D}$  é complexa temos

$$0 = \bar{R}_{AU_i W_\nu \xi} = (\lambda_i - \lambda_\nu) \langle \nabla_A U_i, W_\nu \rangle - (\lambda_3 - \lambda_\nu) \langle \nabla_{U_i} A, W_\nu \rangle.$$

Por (4.14) temos que  $\langle \nabla_{U_i} A, W_\nu \rangle = 0$ , polo cal deducimos que  $\langle \nabla_A U_i, W_\nu \rangle = 0$ . Usando esta igualdade (con  $i$  e  $j$  intercambiados) temos

$$\begin{aligned} 0 &= A \langle W_i, J\xi \rangle = \langle \bar{\nabla}_A W_i, J\xi \rangle + \langle W_i, \bar{\nabla}_A J\xi \rangle \\ &= b_i \langle \nabla_A W_i, U_i \rangle + b_j \langle \nabla_A W_i, U_j \rangle - \langle W_i, JSA \rangle \\ &= b_i \langle \nabla_A W_i, U_i \rangle, \end{aligned}$$

e, entón,  $\langle \nabla_A U_i, W_i \rangle = 0$ . Así, temos  $\nabla_A U_i = \langle \nabla_A U_i, U_j \rangle U_j$ . Para calcular este produto escalar podemos usar a expresión explícita para  $\bar{R}$ , o Lema 4.1 (aplicado a  $A, U_i, U_j$ ) e (4.14):

$$\begin{aligned} \frac{c}{4} (-1)^i (b_i^2 - 2b_j^2) &= \bar{R}_{AU_i U_j \xi} = (\lambda_i - \lambda_j) \langle \nabla_A U_i, U_j \rangle - (\lambda_3 - \lambda_j) \langle \nabla_{U_i} A, U_j \rangle \\ &= (\lambda_i - \lambda_j) \langle \nabla_A U_i, U_j \rangle - (\lambda_3 - \lambda_j) (-1)^i \left( \lambda_i - \frac{3cb_i^2}{4(\lambda_3 - \lambda_i)} \right). \end{aligned}$$

Isto permítenos concluír (4.15).

Finalmente, demostremos (4.16).

Posto que  $A$  ten norma constante, tense que  $\langle \nabla_A A, A \rangle = 0$ . De (4.15) temos que  $\langle \nabla_A A, U_i \rangle = 0$  para  $i = 1, 2$ . Sendo  $\nu \in \{1, 2\} \cup \{4, \dots, g\}$ , do Lema 4.3 séguese que  $\langle \nabla_A A, W_\nu \rangle = 0$ . Consideremos agora o seguinte:

$$\begin{aligned} 0 &= A \langle JU_i, W_3 \rangle = \langle \bar{\nabla}_A JU_i, W_3 \rangle + \langle JU_i, \bar{\nabla}_A W_3 \rangle \\ &= -\langle \nabla_A U_i, JW_3 \rangle + \langle JU_i, \bar{\nabla}_A W_3 \rangle. \end{aligned}$$

O primeiro termo anúlase debido a (4.15) (pois  $\mathfrak{D}$  é  $J$ -invariante), e para o segundo termo, substituíndo  $JU_i$  por  $(-1)^i b_j A - b_i \xi$  temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle JU_i, \bar{\nabla}_A W_3 \rangle = (-1)^i b_j \langle A, \nabla_A W_3 \rangle - b_i \langle \xi, \bar{\nabla}_A W_3 \rangle \\ &= (-1)^i b_j \langle A, \nabla_A W_3 \rangle + b_i \langle \bar{\nabla}_A \xi, W_3 \rangle \\ &= (-1)^i b_j \langle A, \nabla_A W_3 \rangle - b_i \langle SA, W_3 \rangle \\ &= (-1)^i b_j \langle A, \nabla_A W_3 \rangle - b_i \lambda_3 \langle A, W_3 \rangle \\ &= (-1)^i b_j \langle A, \nabla_A W_3 \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\langle \nabla_A A, W_3 \rangle = 0$ . E isto completa a proba de (4.16).  $\square$

**Corolario 4.10.** *As curvas integrais de  $A$  son xeodésicas en  $M$  e os tres campos de vectores  $A, U_1, U_2$  xeran unha distribución autoparalela  $\mathfrak{D}^\perp$ , é dicir,  $\mathfrak{D}^\perp$  é integrable e as súas follas son subvariedades totalmente xeodésicas de  $M$ .*

A principal dificultade de agora en diante é que o número  $g$  de curvaturas principais é descoñecido. De feito, o obxectivo da Subsección 4.2.4 é o de obter restricións sobre os posibles valores de  $g$ .

Un resultado fundamental para poder seguir conseguindo información sobre a xeometría de  $M$  é o seguinte.

**Proposición 4.11.** *As funcións  $b_1$  e  $b_2$  son constantes.*

*Demostración.* Desenvolvamos a igualdade que nos dá o Lema 4.4 aplicado ós campos  $U_1$  e  $U_2$ , tendo en conta as relacións (4.12) e (4.13):

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda_2 - \lambda_1)(-c - 4\lambda_1\lambda_2 - 2c \langle JU_1, U_2 \rangle^2 + 8 \langle \nabla_{U_1} U_2, \nabla_{U_2} U_1 \rangle \\
&\quad - 4 \langle \nabla_{U_1} U_1, \nabla_{U_2} U_2 \rangle) - 4c \langle JU_1, U_2 \rangle (U_1 \langle U_2, J\xi \rangle + U_2 \langle U_1, J\xi \rangle) \\
&\quad - c \langle U_1, J\xi \rangle (3U_2 \langle JU_1, U_2 \rangle + \langle \nabla_{U_2} U_1, JU_2 \rangle - 2 \langle \nabla_{U_1} U_2, JU_2 \rangle) \\
&\quad - c \langle U_2, J\xi \rangle (3U_1 \langle JU_1, U_2 \rangle - \langle \nabla_{U_1} U_2, JU_1 \rangle + 2 \langle \nabla_{U_2} U_1, JU_1 \rangle) \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1)(-c - 4\lambda_1\lambda_2 + 8 \langle \nabla_{U_1} U_2, A \rangle \langle \nabla_{U_2} U_1, A \rangle - 4 \langle \nabla_{U_1} U_1, A \rangle \langle \nabla_{U_2} U_2, A \rangle) \\
&\quad + c(2b_1^2 - b_2^2) \langle \nabla_{U_1} U_2, A \rangle + c(2b_2^2 - b_1^2) \langle \nabla_{U_2} U_1, A \rangle \\
&= -\frac{3c^2}{2(\lambda_3 - \lambda_1)} b_1^4 + \frac{3c^2}{2(\lambda_3 - \lambda_2)} b_2^4 + \frac{3c^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} b_1^2 b_2^2 \\
&\quad + \frac{c(6\lambda_2^2 - 7\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)}{\lambda_3 - \lambda_1} b_1^2 \\
&\quad + \frac{c(-6\lambda_1^2 + 7\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3)}{\lambda_3 - \lambda_2} b_2^2 - (\lambda_2 - \lambda_1)(c + 12\lambda_1\lambda_2).
\end{aligned}$$

Agora, substituíndo  $b_2^2$  por  $1 - b_1^2$  obtense

$$(4.17) \quad 0 = \frac{9c^2(\lambda_2 - \lambda_1)}{2(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} b_1^4 + \Lambda_1(c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) b_1^2 + \Lambda_0(c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

onde  $\Lambda_0$  e  $\Lambda_1$  son funcións racionais dependentes das constantes  $c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Por tanto, a anterior é unha ecuación cuadrática en  $b_1^2$ , con coeficientes constantes e con coeficiente principal non nulo. Así pois, posúe unha ou dúas solucións constantes (e polo menos unha debe ser real positiva). Como  $b_1^2$  é unha función continua sobre a variedade conexa  $M$ , séguese que  $b_1^2$  é unha función constante. Por tanto, a función  $b_1 > 0$  é constante e, usando a relación  $b_1^2 + b_2^2$ , conclúese que tamén  $b_2 > 0$  é unha función constante.  $\square$

*Observación 4.12.* Chegados a este punto, estamos interesados en calcular expresións concretas para  $b_1$  e  $b_2$ . Da ecuación (4.17) e mais da relación  $b_1^2 + b_2^2 = 1$  pódense obter expresións válidas para  $b_1^2$  e  $b_2^2$ , pero nas que aparecen radicais e que resultan pouco manexables. É por este motivo polo cal no seguinte corolario desenvolvemos un razoamento alternativo para atopar unhas expresións máis cómodas.

**Corolario 4.13.** *As funcións  $b_1^2$  e  $b_2^2$  veñen dadas pola seguinte expresión:*

$$(4.18) \quad b_i^2 = \frac{4(\lambda_j - 2\lambda_3)(\lambda_i - \lambda_3)^2}{c(\lambda_i - \lambda_j)},$$

sendo  $i, j \in \{1, 2\}$  e  $i \neq j$ . Ademais, verifícase a relación seguinte:

$$(4.19) \quad 0 = c - 4\lambda_1\lambda_2 + 8(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3 - 12\lambda_3^2.$$

*Demostración.* Pola Proposición 4.11 cúmprese que  $0 = A(b_i) = A \langle J\xi, U_i \rangle$  para  $i = 1, 2$ . Pero entón, aplicando (4.15), temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{b_j} A \langle J\xi, U_i \rangle = \frac{1}{b_j} (\langle \bar{\nabla}_A J\xi, U_i \rangle + \langle J\xi, \nabla_A U_i \rangle) = -\frac{\lambda_3}{b_j} \langle JA, U_i \rangle + \langle \nabla_A U_i, U_j \rangle \\ &= (-1)^i \lambda_3 + \frac{(-1)^j}{\lambda_i - \lambda_j} \left( \frac{c}{4}(2b_j^2 - b_i^2) + (\lambda_j - \lambda_3) \left( \lambda_i - \frac{3cb_i^2}{4(\lambda_3 - \lambda_i)} \right) \right) \\ &= (-1)^i \left( c \frac{-\lambda_i + 3\lambda_j - 2\lambda_3}{4(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_3 - \lambda_i)} b_i^2 - c \frac{1}{2(\lambda_i - \lambda_j)} b_j^2 + \frac{2\lambda_i\lambda_3 - \lambda_j\lambda_3 - \lambda_i\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right). \end{aligned}$$

Podemos considerar entón o seguinte sistema lineal nas incógnitas  $b_1^2, b_2^2$ :

$$(4.20) \quad \left. \begin{aligned} c \frac{-\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3}{4(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} b_1^2 - c \frac{1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} b_2^2 &= -\frac{2\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ -c \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} b_1^2 + c \frac{-\lambda_2 + 3\lambda_1 - 2\lambda_3}{4(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} b_2^2 &= -\frac{2\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ b_1^2 + b_2^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

É doado comprobar que a matriz do sistema anterior ten rango 2. Por tanto, o sistema, que debe ser compatible, é determinado. A condición de compatibilidade é que o determinante da matriz ampliada sexa cero. Por tanto:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} c \frac{-\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3}{4(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} & -c \frac{1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} & -\frac{2\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ -c \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} & c \frac{-\lambda_2 + 3\lambda_1 - 2\lambda_3}{4(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} & -\frac{2\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{3c(c - 4\lambda_1\lambda_2 + 8\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) - 12\lambda_3^2)}{16(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \end{aligned}$$

e de aquí deducimos (4.19).

Ademais, podemos resolver o sistema, obtendo as expresións (4.18):

$$b_1^2 = \frac{4(\lambda_2 - 2\lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)^2}{c(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad b_2^2 = \frac{4(\lambda_1 - 2\lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)^2}{c(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad \square$$

**Proposición 4.14.** *A curvatura seccional holomorfa  $c$  é negativa. Neste caso, verifícase que  $|\lambda_3| < \frac{\sqrt{-c}}{2}$  e temos as seguintes expresións para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :*

$$(4.21) \quad \{\lambda_1, \lambda_2\} = \left\{ \frac{1}{2} \left( 3\lambda_3 - \sqrt{-c - 3\lambda_3^2} \right), \frac{1}{2} \left( 3\lambda_3 + \sqrt{-c - 3\lambda_3^2} \right) \right\}.$$

*Demostración.* Sexan  $i, j \in \{1, 2\}$  con  $i \neq j$ . O Lema 4.4 aplicado ós campos  $U_i$  e  $A$  xunto coas igualdades (4.14) e (4.15) permítenos facer os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_3 - \lambda_i)(-c - 4\lambda_i\lambda_3 - 2c \langle JU_i, A \rangle^2 + 8 \langle \nabla_{U_i} A, \nabla_A U_i \rangle - 4 \langle \nabla_{U_i} U_i, \nabla_A A \rangle) \\ &\quad - 4c \langle JU_i, A \rangle (U_i \langle A, J\xi \rangle + A \langle U_i, J\xi \rangle) \\ &\quad - c \langle U_i, J\xi \rangle (3A \langle JU_i, A \rangle + \langle \nabla_A U_i, JA \rangle - 2 \langle \nabla_{U_i} A, JA \rangle) \\ &\quad - c \langle A, J\xi \rangle (3U_i \langle JU_i, A \rangle - \langle \nabla_{U_i} A, JU_i \rangle + 2 \langle \nabla_A U_i, JU_i \rangle) \\ &= (\lambda_3 - \lambda_i)(-c - 4\lambda_i\lambda_3 - 2cb_j^2 + 8 \langle \nabla_{U_i} A, U_j \rangle \langle \nabla_A U_i, U_j \rangle) + 4(-1)^j cb_j^2 \langle \nabla_A U_i, U_j \rangle \\ &\quad + 4(-1)^j cb_j \langle U_i, \bar{\nabla}_A J\xi \rangle - 3cb_i \langle \bar{\nabla}_A JU_i, A \rangle - 3cb_i \langle JU_i, \bar{\nabla}_A A \rangle \\ &\quad + (-1)^j cb_i^2 \langle \nabla_A U_i, U_j \rangle + 2(-1)^j b_i b_j \langle \nabla_{U_i} A, U_i \rangle + 2(-1)^i cb_i^2 \langle \nabla_{U_i} A, U_j \rangle \\ &= (\lambda_3 - \lambda_i)(-c - 4\lambda_i\lambda_3 - 2cb_j^2 + 8 \langle \nabla_{U_i} A, U_j \rangle \langle \nabla_A U_i, U_j \rangle) \\ &\quad + 2(-1)^i c(b_i^2 - 2b_j^2) \langle \nabla_A U_i, U_j \rangle + 2(-1)^i cb_i^2 \langle \nabla_{U_i} A, U_j \rangle + 2(-1)^j cb_i b_j \langle \nabla_{U_i} A, U_i \rangle \\ &\quad - 4c\lambda_3 b_j^2 + 3c\lambda_3 b_i^2 \\ &= \frac{c^2(-4\lambda_3 + \lambda_i + 3\lambda_j)}{2(\lambda_i - \lambda_3)(\lambda_i - \lambda_j)} b_i^4 + \frac{2c^2}{\lambda_i - \lambda_j} b_j^4 + \frac{c^2(-8\lambda_3 + 5\lambda_i + 3\lambda_j)}{2(\lambda_i - \lambda_3)(\lambda_i - \lambda_j)} b_i^2 b_j^2 \\ &\quad - \frac{c(5\lambda_3\lambda_i - 8\lambda_j\lambda_i + 3\lambda_3\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} b_i^2 - \frac{2c(-3\lambda_i^2 + 7\lambda_3\lambda_i - \lambda_j\lambda_i - 3\lambda_3\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} b_j^2 \\ &\quad + \frac{(\lambda_i - \lambda_3)(-4\lambda_3\lambda_i^2 + 8\lambda_j\lambda_i^2 - 4\lambda_3\lambda_j\lambda_i + c\lambda_i - c\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}. \end{aligned}$$

Substituíndo  $b_i^2$  e  $b_j^2$  polas expresións (4.18), a igualdade anterior redúcese a:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\lambda_i - \lambda_3}{\lambda_i - \lambda_j} (-72\lambda_3^3 + 48\lambda_i\lambda_3^2 + 108\lambda_j\lambda_3^2 - 4\lambda_i^2\lambda_3 - 32\lambda_j^2\lambda_3 - 72\lambda_i\lambda_j\lambda_3 \\ &\quad + 16\lambda_i\lambda_j^2 + c\lambda_i + 8\lambda_i^2\lambda_j - c\lambda_j). \end{aligned}$$

E isto cúmprese para  $i = 1, j = 2$  e tamén para  $i = 2, j = 1$ . Por conseguinte, dedúcense as seguintes dúas ecuacións:

$$(4.22) \quad \begin{aligned} 0 &= -72\lambda_3^3 + 48\lambda_1\lambda_3^2 + 108\lambda_2\lambda_3^2 - 4\lambda_1^2\lambda_3 - 32\lambda_2^2\lambda_3 - 72\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &\quad + 16\lambda_1\lambda_2^2 + c\lambda_1 + 8\lambda_1^2\lambda_2 - c\lambda_2, \end{aligned}$$

$$(4.23) \quad \begin{aligned} 0 &= -72\lambda_3^3 + 48\lambda_2\lambda_3^2 + 108\lambda_1\lambda_3^2 - 4\lambda_2^2\lambda_3 - 32\lambda_1^2\lambda_3 - 72\lambda_2\lambda_1\lambda_3 \\ &\quad + 16\lambda_2\lambda_1^2 + c\lambda_2 + 8\lambda_2^2\lambda_1 - c\lambda_1. \end{aligned}$$



Restando unha doutra obtemos que:

$$0 = 2(\lambda_1 - \lambda_2)(c - 4\lambda_1\lambda_2 + 14\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) - 30\lambda_3^2).$$

E, por tanto:

$$0 = c - 4\lambda_1\lambda_2 + 14\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) - 30\lambda_3^2.$$

Agora, restando (4.19) da anterior ecuación, temos:

$$0 = 6\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3).$$

De aquí obtemos que  $\lambda_3 = 0$  ou  $\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$ . Distingamos ambos casos:

- Supoñamos que  $\lambda_3 = 0$ . Entón (4.22) queda en  $c(\lambda_1 - \lambda_2) + 8\lambda_1^2\lambda_2 + 16\lambda_1\lambda_2^2 = 0$  e, usando que agora (4.19) dinos que  $c - 4\lambda_1\lambda_2 = 0$ , deducimos  $3c(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$ , de onde  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ . E, como estamos supondo que  $\lambda_3 = 0$ , verifícase tamén  $\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$ . Por tanto, este primeiro caso englobase dentro do seguinte.
- Supoñamos entón que  $\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$ . A ecuación (4.19), substituíndo agora  $\lambda_1$  por  $-\lambda_2 + 3\lambda_3$ , redúcese a  $c + 4\lambda_2^2 - 12\lambda_2\lambda_3 + 12\lambda_3^2 = 0$ . Esta é unha ecuación de segundo grao na incógnita  $\lambda_2$ , con discriminante  $16(-c - 3\lambda_3^2)$ . Posto que, se  $c > 0$  tal discriminante é estritamente negativo, deducimos que só é posible o caso  $c < 0$ . Neste caso tense:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( 3\lambda_3 \pm \sqrt{-c - 3\lambda_3^2} \right).$$

Razoando simetricamente podemos deducir que tamén  $\lambda_1$  toma un dos dous valores anteriores.

Polo tanto concluimos que

$$(4.24) \quad \{\lambda_1, \lambda_2\} = \left\{ \frac{1}{2} \left( 3\lambda_3 + (-1)^i \sqrt{-c - 3\lambda_3^2} \right) : i = 1, 2 \right\}.$$

Por outra banda, sabemos que  $|\lambda_3| < \sqrt{\frac{-c}{3}}$ .

Substituíndo as expresións (4.24) en (4.18) deducimos que

$$\{b_1^2, b_2^2\} = \left\{ -\frac{\left( (-1)^i \lambda_3 + \sqrt{-c - 3\lambda_3^2} \right)^3}{2c \left( \sqrt{-c - 3\lambda_3^2} \right)} : i = 1, 2 \right\},$$

para  $i = 1, 2$ . Se supomos que  $\frac{\sqrt{-c}}{2} \leq |\lambda_3| < \sqrt{\frac{-c}{3}}$ , séguese que  $-c - 4\lambda_3^2 \leq 0$ , co cal  $-|\lambda_3| + \sqrt{-c - 3\lambda_3^2} \leq 0$ . Por tanto,  $b_1^2 \leq 0$  ou  $b_2^2 \leq 0$ , o cal non pode ser.

Obtense así que  $|\lambda_3| < \frac{\sqrt{-c}}{2}$ , e isto finaliza a demostración.  $\square$

**Corolario 4.15.** *Para todo  $k \in \{4, \dots, g\}$ , a distribución  $T_{\lambda_k}$  é real.*

*Demostración.* Sexa  $k \in \{4, \dots, g\}$  e tomemos  $W_k, W'_k \in \Gamma(T_{\lambda_k})$  dous campos de vectores unitarios definidos localmente. Como  $\langle J\xi, W'_k \rangle = 0$ , aplicando o Lema 4.3, as relacións (4.18) e mais tendo en conta que de (4.21) se deduce que  $\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0$ , verifícase o seguinte:

$$\begin{aligned}
0 &= W_k \langle J\xi, W'_k \rangle = \langle \bar{\nabla}_{W_k} J\xi, W'_k \rangle + \langle J\xi, \nabla_{W_k} W'_k \rangle \\
&= -\lambda_k \langle JW_k, W'_k \rangle + b_1 \langle U_1, \nabla_{W_k} W'_k \rangle + b_2 \langle U_2, \nabla_{W_k} W'_k \rangle \\
&= -\lambda_k \langle JW_k, W'_k \rangle + \frac{cb_1^2}{4(\lambda_k - \lambda_1)} \langle JW_k, W'_k \rangle + \frac{cb_2^2}{4(\lambda_k - \lambda_2)} \langle JW_k, W'_k \rangle \\
&= \left( -\lambda_k + \frac{cb_1^2}{4(\lambda_k - \lambda_1)} + \frac{cb_2^2}{4(\lambda_k - \lambda_2)} \right) \langle JW_k, W'_k \rangle \\
&= \frac{(\lambda_3 - \lambda_k)^3}{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)} \langle JW_k, W'_k \rangle.
\end{aligned}$$

Por tanto, posto que  $\lambda_k \neq \lambda_3$ , obtemos que  $\langle JW_k, W'_k \rangle = 0$ . Dado que  $W_k, W'_k$  eran campos vectoriais unitarios definidos localmente e arbitrarios, deducimos que  $JT_{\lambda_k} \subset T_{\lambda_k}^\perp$ , é dicir,  $T_{\lambda_k}$  é real.  $\square$

#### 4.2.4. Unha cota para o número de curvaturas principais

Agora botaremos man da ecuación de Gauß reescrita no Lema 4.4, o cal nos permitirá traballar con certas desigualdades que verifican as curvaturas principais. Isto conduciranos a varias conclusións importantes sobre as curvaturas principais da hipersuperficie  $M$  e os seus correspondentes espazos de curvatura. Salientamos a propiedade de que o número  $g$  de curvaturas principais de  $M$  só pode ser 3 ou 4.

**Lema 4.16.** *Denotemos por  $(\cdot)_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , a proxección sobre a distribución  $T_{\lambda_i} \ominus \mathbb{R}U_i$ , e por  $(\cdot)_k$  a proxección sobre  $T_{\lambda_k}$ , se  $k = 4, \dots, g$ .*

1. *Para cada  $i \in \{1, 2\}$  e cada campo unitario local  $W_i \in \Gamma(T_{\lambda_i} \ominus \mathbb{R}U_i)$ , pondo  $j \in \{1, 2\}$ ,  $j \neq i$ , tense que:*

$$(4.25) \quad 0 = -c - 4\lambda_3\lambda_i + 8 \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_3 - \lambda_j} \|(\nabla_A W_i)_j\|^2 + 8 \sum_{k=4}^g \frac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_3 - \lambda_k} \|(\nabla_A W_i)_k\|^2.$$

2. *Para cada  $k \in \{4, \dots, g\}$  e cada campo unitario local  $W_k \in \Gamma(T_{\lambda_k})$  cúmprese que:*

$$(4.26) \quad 0 = -c - 4\lambda_3\lambda_k + 8 \frac{\lambda_k - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \|(\nabla_A W_k)_1\|^2 + 8 \frac{\lambda_k - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \|(\nabla_A W_k)_2\|^2 \\ + 8 \sum_{l=4, l \neq k}^g \frac{\lambda_k - \lambda_l}{\lambda_3 - \lambda_l} \|(\nabla_A W_k)_l\|^2.$$

*Demostración.* Os campos de vectores que usaremos nos seguintes razoamentos entenderanse definidos localmente.

1. Sexa  $W_i \in \Gamma(T_{\lambda_i} \ominus \mathbb{R}U_i)$  para  $i \in \{1, 2\}$  un campo local unitario. O Lema 4.4 aplicado a  $A$  e a  $W_i$  dinos que:

$$0 = -c - 4\lambda_3\lambda_i + 8 \langle \nabla_{W_i} A, \nabla_A W_i \rangle.$$

De (4.15) e do Lema 4.3 (aplicado a  $A$ , a un campo xenérico de  $\Gamma(T_{\lambda_3})$  e a  $W_i$ ) séguese que  $\nabla_A W_i \in \Gamma((T_{\lambda_1} \ominus \mathbb{R}U_1) \oplus (T_{\lambda_2} \ominus \mathbb{R}U_2) \oplus T_{\lambda_4} \oplus \dots \oplus T_{\lambda_g})$ , mentres que de novo polo Lema 4.3 (esta vez aplicado a  $W_i$ , a un campo xenérico de  $\Gamma(T_{\lambda_i})$  e a  $A$ ) deducimos que  $\nabla_{W_i} A \in \Gamma(T_{\lambda_j} \oplus (T_{\lambda_3} \ominus \mathbb{R}A) \oplus T_{\lambda_4} \oplus \dots \oplus T_{\lambda_g})$ , con  $j \in \{1, 2\}, j \neq i$ .

Temos entón que

$$\langle \nabla_{W_i} A, \nabla_A W_i \rangle = \langle \nabla_{W_i} A, (\nabla_A W_i)_j \rangle + \sum_{k=4}^g \langle \nabla_{W_i} A, (\nabla_A W_i)_k \rangle.$$

Usando o Lema 4.1 obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{W_i} A, \nabla_A W_i \rangle &= \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_3 - \lambda_j} \langle \nabla_A W_i, (\nabla_A W_i)_j \rangle + \sum_{k=4}^g \frac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_3 - \lambda_k} \langle \nabla_A W_i, (\nabla_A W_i)_k \rangle \\ &= \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_3 - \lambda_j} \langle (\nabla_A W_i)_j, (\nabla_A W_i)_j \rangle + \sum_{k=4}^g \frac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_3 - \lambda_k} \langle (\nabla_A W_i)_k, (\nabla_A W_i)_k \rangle, \end{aligned}$$

e entón:

$$0 = -c - 4\lambda_3\lambda_i + 8 \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_3 - \lambda_j} \|(\nabla_A W_i)_j\|^2 + 8 \sum_{k=4}^g \frac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_3 - \lambda_k} \|(\nabla_A W_i)_k\|^2.$$

2. Sexa agora  $W_k \in \Gamma(T_{\lambda_k})$  un campo unitario local. O Lema 4.4 aplicado a  $A$  e a  $W_k$  dinos que:

$$0 = -c - 4\lambda_3\lambda_k + 8 \langle \nabla_{W_k} A, \nabla_A W_k \rangle.$$

De (4.15) e do Lema 4.3 (aplicado a  $A$ , a un campo xenérico de  $\Gamma(T_{\lambda_3})$  e a  $W_k$ ) dedúcese que  $\nabla_A W_k \in \Gamma((T_{\lambda_1} \ominus \mathbb{R}U_1) \oplus (T_{\lambda_2} \ominus \mathbb{R}U_2) \oplus T_{\lambda_4} \oplus \dots \oplus T_{\lambda_g})$ , mentres que outra vez do Lema 4.3 (esta vez aplicado a  $W_k$ , a un campo xenérico de  $\Gamma(T_{\lambda_k})$  e a  $A$ ) séguese que  $\nabla_{W_k} A \in \Gamma(T_{\lambda_1} \oplus T_{\lambda_2} \oplus (T_{\lambda_3} \ominus \mathbb{R}A) \oplus T_{\lambda_4} \oplus \dots \oplus T_{\lambda_{k-1}} \oplus T_{\lambda_{k+1}} \oplus \dots \oplus T_{\lambda_g})$ .

Razoando igual ca no caso anterior obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= -c - 4\lambda_3\lambda_k + 8 \frac{\lambda_k - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \|(\nabla_A W_k)_1\|^2 + 8 \frac{\lambda_k - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \|(\nabla_A W_k)_2\|^2 \\ &\quad + 8 \sum_{l=4, l \neq k}^g \frac{\lambda_k - \lambda_l}{\lambda_3 - \lambda_l} \|(\nabla_A W_k)_l\|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Na ecuación (4.25) débese observar que, se  $\dim T_{\lambda_j} = 1$ , o terceiro sumando desaparece. E, na ecuación (4.26), se  $\dim T_{\lambda_i} = 1$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , o  $(i + 2)$ -ésimo sumando desaparece.

De aquí en diante, faremos a suposición de que se escolleu  $\xi$  de xeito que  $\lambda_3 \geq 0$  (pódese asumir isto posto que cambiar o sentido do campo  $\xi$  cambia o signo de todas as curvaturas principais). Ademais, intercambiando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  se fose necesario, asumiremos as seguintes expresións para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  en función de  $\lambda_3$ :

$$(4.27) \quad \lambda_i = \frac{1}{2} \left( 3\lambda_3 + (-1)^i \sqrt{-c - 3\lambda_3^2} \right), \quad i = 1, 2.$$

Dacordo coas expresións (4.27), é doado comprobar que  $c + 4\lambda_3^2 < 0$  e  $c + 4\lambda_3\lambda_1 < 0$  para todo  $\lambda_3 \in \left[0, \frac{\sqrt{-c}}{2}\right)$ , e que

$$c + 4\lambda_3\lambda_2 \begin{cases} < 0 & \text{se } 0 \leq \lambda_3 < \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}}, \\ = 0 & \text{se } \lambda_3 = \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}}, \\ > 0 & \text{se } \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}} < \lambda_3 < \frac{\sqrt{-c}}{2}. \end{cases}$$

Ademais temos sempre que  $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2$ .

**Lema 4.17.** *Para todo  $k \in \{4, \dots, g\}$ , se se verifica unha das seguintes condicións:*

(i)  $\dim T_{\lambda_1} = \dim T_{\lambda_2} = 1$ ,

(ii)  $\dim T_{\lambda_1} = 1$  e  $\lambda_k < \lambda_2$ ,

(iii)  $\lambda_1 < \lambda_k < \lambda_2$ ,

entón tense que  $c + 4\lambda_3\lambda_k \geq 0$ .

*Demostración.* Sexa  $W_k \in \Gamma(T_{\lambda_k})$  un campo unitario definido localmente. Supoñamos que  $c + 4\lambda_3\lambda_k < 0$  e que se verifica unha das condicións do enunciado. Da ecuación (4.26) dedúcese que existe un  $l \in \{4, \dots, g\}$ ,  $l \neq k$  tal que  $\frac{\lambda_k - \lambda_l}{\lambda_3 - \lambda_l} < 0$ . Escollamos  $\lambda_r$  de entre todas aquelas curvaturas principais  $\lambda_m$  con  $m \in \{4, \dots, g\}$  e con  $\frac{\lambda_k - \lambda_m}{\lambda_3 - \lambda_m} < 0$  que minimiza a  $|\lambda_3 - \lambda_m|$ .

Se  $\lambda_k < \lambda_r$  entón  $\lambda_3 > \lambda_r$  e, por tanto,  $\lambda_k < \lambda_r < \lambda_3$ . Analogamente, se  $\lambda_k > \lambda_r$ , séguese que  $\lambda_3 < \lambda_r < \lambda_k$ .

Aplicando a ecuación (4.26) a un campo unitario local  $W_r \in \Gamma(T_{\lambda_r})$ , e tendo en conta a hipótese do enunciado que estamos asumindo, xunto con  $c + 4\lambda_3\lambda_r \leq c + 4\lambda_3 \max\{\lambda_3, \lambda_k\} < 0$ , deducimos que existe un  $s \in \{4, \dots, g\}$ ,  $s \neq r$ , tal que  $\frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_3 - \lambda_s} < 0$ .

Supoñamos  $\lambda_k < \lambda_r < \lambda_3$ . Se  $\lambda_3 < \lambda_s$  entón  $\lambda_r > \lambda_s$ , co cal  $\lambda_3 < \lambda_s < \lambda_r < \lambda_3$ , o cal é un absurdo. Por tanto,  $\lambda_3 > \lambda_s$  e, entón,  $\lambda_r < \lambda_s$ , polo cal  $\lambda_k < \lambda_r < \lambda_s < \lambda_3$  e tamén  $\frac{\lambda_k - \lambda_s}{\lambda_3 - \lambda_s} < \frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_3 - \lambda_s} < 0$ , pero entón  $\lambda_s$  supón unha contradición coa definición de  $\lambda_r$ .

Consideremos entón o outro caso:  $\lambda_3 < \lambda_r < \lambda_k$ . Se  $\lambda_3 > \lambda_s$  entón  $\lambda_r < \lambda_s$ , co cal  $\lambda_3 < \lambda_r < \lambda_s < \lambda_3$ , o cal é un absurdo. Por tanto,  $\lambda_3 < \lambda_s$  e, entón,  $\lambda_r > \lambda_s$ , polo cal  $\lambda_3 < \lambda_s < \lambda_r < \lambda_k$  e tamén  $\frac{\lambda_k - \lambda_s}{\lambda_3 - \lambda_s} < \frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_3 - \lambda_s} < 0$ , pero entón  $\lambda_s$  contradí novamente a definición de  $\lambda_r$ .

Por tanto, se se dá unha das condicións do enunciado, hase de ter  $c + 4\lambda_3\lambda_k \geq 0$ .  $\square$

**Proposición 4.18.** *Tense que  $\dim T_{\lambda_1} = 1$ .*

*Demostración.* Supoñamos que  $\dim T_{\lambda_1} > 1$ . Aplicando a ecuación (4.25) a un campo unitario local  $W_1 \in \Gamma(T_{\lambda_1} \ominus \mathbb{R}U_1)$ , dedúcese que existe un  $k \geq 4$  tal que  $\frac{\lambda_1 - \lambda_k}{\lambda_3 - \lambda_k} < 0$ . Se  $\lambda_3 < \lambda_k$ , entón  $\lambda_1 > \lambda_k$ , co cal  $\lambda_3 < \lambda_k < \lambda_1$ , o cal non é certo. Se, pola contra,  $\lambda_3 > \lambda_k$ , entón  $\lambda_1 < \lambda_k$ , co cal  $\lambda_1 < \lambda_k < \lambda_3 < \lambda_2$  e, entón polo Lema 4.17,  $c + 4\lambda_3\lambda_k \geq 0$ . Pero, como  $\lambda_k < \lambda_3$ , tamén se tería que  $c + 4\lambda_3\lambda_k \leq c + 4\lambda_3^2 < 0$ , o cal contradí a afirmación previa.  $\square$

**Proposición 4.19.** *Verifícase que:*

(i)  $g \in \{3, 4\}$ .

(ii) Se  $g = 3$  e  $\dim T_{\lambda_2} > 1$ , entón  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{\sqrt{-3c}}{2}$  e  $\lambda_3 = \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}}$ .

(iii) Se  $g = 4$ , entón  $\dim T_{\lambda_2} = 1$ ,  $0 \neq \lambda_3 \neq \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}}$  e  $\lambda_4 = -\frac{c}{4\lambda_3}$ .

*Demostración.* O Lema 4.5 indicábanos que  $g \geq 3$ .

Supoñamos entón que  $g = 3$  e que  $\dim T_{\lambda_2} > 1$  e probemos primeiro (ii). A ecuación (4.25) aplicada a algún campo unitario local  $W_2 \in \Gamma(T_{\lambda_2} \ominus \mathbb{R}U_2)$  implica que  $c + 4\lambda_3\lambda_2 = 0$ . Pero isto só ocorre se  $\lambda_3 = \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}}$ . Por tanto, por (4.27),  $\lambda_2 = \frac{\sqrt{-3c}}{2}$  e  $\lambda_1 = 0$ , e así queda probado (ii).

Supoñamos agora que  $g \geq 4$  e que  $\dim T_{\lambda_2} > 1$ , e razoemos por redución ó absurdo. Distingamos dous casos:

- $0 \leq \lambda_3 < \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}}$ . Neste caso  $c + 4\lambda_3\lambda_2 < 0$ . Aplicando a ecuación (4.25) a algún campo unitario local  $W_2 \in \Gamma(T_{\lambda_2} \ominus \mathbb{R}U_2)$ , deducimos que existe un  $k \geq 4$  tal que  $\frac{\lambda_2 - \lambda_k}{\lambda_3 - \lambda_k} < 0$ . Se  $\lambda_k < \lambda_3$  entón  $\lambda_2 < \lambda_k$ , co cal  $\lambda_2 < \lambda_3$ , o cal non é certo. Supoñamos entón que  $\lambda_k > \lambda_3$ . Neste caso  $\lambda_2 > \lambda_k$ , co cal  $c + 4\lambda_3\lambda_k \leq c + 4\lambda_3\lambda_2 < 0$  o cal contradí o segundo apartado do Lema 4.17.

- $\frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}} \leq \lambda_3 < \frac{\sqrt{-c}}{2}$ . Neste caso  $c + 4\lambda_3\lambda_2 \geq 0$ .

Supoñamos que existise un  $k \geq 4$  tal que  $\lambda_3 > \lambda_k$ ; entón  $c + 4\lambda_3\lambda_k < c + 4\lambda_3^2 < 0$  e tamén  $\lambda_2 > \lambda_k$ , co cal o Lema 4.17 achéganos unha contradición. Por tanto,  $\lambda_3 < \lambda_k$  para todo  $k \geq 4$ .

Se  $\frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}} < \lambda_3 < \frac{\sqrt{-c}}{2}$ , a ecuación (4.25) aplicada a algún campo unitario local  $W_2 \in \Gamma(T_{\lambda_2} \ominus \mathbb{R}U_2)$  permítenos dicir que existe un  $k \geq 4$  tal que  $\frac{\lambda_2 - \lambda_k}{\lambda_3 - \lambda_k} > 0$  e, como  $\lambda_3 < \lambda_k$ , tamén  $\lambda_2 < \lambda_k$ .

No caso  $\lambda_3 = \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}}$ , consideremos un  $k \geq 4$  calquera. Se  $\lambda_2 > \lambda_k$ , entón  $c + 4\lambda_3\lambda_k < c + 4\lambda_3\lambda_2 = 0$ , en contra do Lema 4.17.

Por tanto, en todo caso,  $\lambda_2 < \lambda_k$ . Sexa  $\lambda_r$  a maior das curvaturas principais con  $r \in \{4, \dots, g\}$ ; polo xa visto,  $\lambda_2 < \lambda_r$ . Por tanto,  $c + 4\lambda_3\lambda_r > c + 4\lambda_3\lambda_2 \geq 0$ . Aplicando a ecuación (4.26) a algún campo unitario local  $W_r \in \Gamma(T_{\lambda_r})$  obtemos que existe un

$s \geq 4, s \neq r$  verificando  $\frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_3 - \lambda_s} > 0$ . Pola definición de  $\lambda_r$  temos que  $\lambda_s < \lambda_r$ . Séguese que  $\lambda_3 > \lambda_s$ , co cal  $c + 4\lambda_3\lambda_s < c + 4\lambda_3^2 < 0$ , pero isto implica unha contradición polo Lema 4.17 (pois  $\lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_s$ ).

En todo caso chegamos a unha contradición. Por tanto, se  $g \geq 4$  entón  $\dim T_{\lambda_2} = 1$ .

Se existise un  $k \geq 4$  tal que  $\lambda_k < \lambda_3$ , entón  $c + 4\lambda_3\lambda_k \leq c + 4\lambda_3^2 < 0$ , o que contradiría o Lema 4.17.

Entón verificase que  $\lambda_k > \lambda_3$  para todo  $k \geq 4$ . Ademais, polo Lema 4.17,  $c + 4\lambda_3\lambda_k \geq 0$  para todo  $k \geq 4$ . Isto implica, en particular, que  $\lambda_3 \neq 0$ , xa que  $c < 0$ .

Supoñamos que existe un  $k \geq 4$  tal que  $c + 4\lambda_3\lambda_k > 0$ ; sexa entón  $\lambda_r$  a maior das curvaturas principais verificando iso, con  $r \in \{4, \dots, g\}$ . A ecuación (4.26) aplicada a un campo unitario local  $W_r \in \Gamma(T_{\lambda_r})$  indícanos que existe un  $s \geq 4, s \neq r$  tal que  $\frac{\lambda_r - \lambda_s}{\lambda_3 - \lambda_s} > 0$ . Non se pode verificar que  $\lambda_3 > \lambda_s$ , pois teríase que  $c + 4\lambda_3\lambda_s \leq c + 4\lambda_3^2 < 0$ , en contra do Lema 4.17. Pero tampouco se pode ter que  $\lambda_3 < \lambda_s$ , pois entón  $\lambda_r < \lambda_s$  e  $c + 4\lambda_3\lambda_s \geq c + 4\lambda_3\lambda_r > 0$ , en contra da definición de  $\lambda_r$ .

En consecuencia, se  $g \geq 4$ , entón  $c + 4\lambda_3\lambda_k = 0$ , para todo  $k \geq 4$ . Se  $k, l$  son naturais maiores que 3 e menores ou iguais que  $g$  entón  $c + 4\lambda_3\lambda_k = 0 = c + 4\lambda_3\lambda_l$ , co cal  $\lambda_k = \lambda_l$  (pois  $\lambda_3 \neq 0$ ). Como as  $g$  curvaturas son todas distintas, hase de ter  $g = 4$ , o cal proba (i). E, polo xa visto,  $\lambda_4 = -\frac{c}{4\lambda_3}$ . Ademais,  $\lambda_3 \neq \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}}$ , pois, do contrario,  $c + 4\lambda_3\lambda_2 = 0 = c + 4\lambda_3\lambda_4$ , co cal  $\lambda_2$  e  $\lambda_4$  coincidirían. Así, concluimos (iii).  $\square$

#### 4.2.5. A estrutura de autovalores do operador de configuración

No seguinte teorema sintetizamos os principais resultados conseguidos ata o de agora.

**Teorema 4.20.** *Sexa  $M$  unha hipersuperficie real orientable e conexas de  $\mathbb{C}H^n$  ou de  $\mathbb{C}P^n$ ,  $n \geq 2$ , con  $g \geq 2$  curvaturas principais constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ . Sexa  $\xi$  un campo unitario global sobre  $M$ . Entón:*

- *Se  $M \subset \mathbb{C}P^n$  entón  $J\xi$  non pode ter proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvatura.*
- *Se  $J\xi$  ten proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvatura, entón  $g \in \{3, 4\}$  e, para unha ordenación axeitada das curvaturas principais e unha elección adecuada do sentido do campo normal  $\xi$ , temos que:*

- *$J\xi = b_1U_1 + b_2U_2$ , sendo  $U_i$  a proxección ortogonal de  $J\xi$  sobre  $T_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, 2$ , normalizada a lonxitude un, e sendo  $b_1, b_2$  dous números reais positivos tales que*

$$(4.28) \quad b_1^2 = \frac{4(\lambda_2 - 2\lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)^2}{c(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad b_2^2 = \frac{4(\lambda_1 - 2\lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)^2}{c(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

- *Existe un campo vectorial unitario  $A \in \Gamma(T_{\lambda_3})$  tal que*

$$JU_i = (-1)^i b_j A - b_i \xi, \quad (i, j \in \{1, 2\}, i \neq j), \quad \text{e} \quad JA = b_2 U_1 - b_1 U_2.$$

- O subfibrado  $\mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}U_1 \oplus \mathbb{R}U_2 \oplus \mathbb{R}\xi$  é complexo.
- $\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( 3\lambda_3 - \sqrt{-c - 3\lambda_3^2} \right)$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( 3\lambda_3 + \sqrt{-c - 3\lambda_3^2} \right)$  e  $0 \leq \lambda_3 < \frac{\sqrt{-c}}{2}$ .
- $\dim T_{\lambda_1} = 1$ .
- Se  $g = 4$  entón  $\dim T_{\lambda_2} = 1$ ,  $\dim T_{\lambda_4} = k - 1$ , con  $k \in \{2, \dots, n - 1\}$ ,  $\lambda_4 = -\frac{c}{4\lambda_3}$ ,  $0 \neq \lambda_3 \neq \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}}$ , o subfibrado  $T_{\lambda_4}$  é real e  $JT_{\lambda_4} \subset T_{\lambda_3} \ominus \mathbb{R}A$ .
- Se  $g = 3$ , ou ben  $\dim T_{\lambda_2} = 1$  (poñamos entón  $k = 1$ ), ou ben  $\dim T_{\lambda_2} = k > 1$ , con  $k \in \{2, \dots, n - 1\}$  e, neste caso, verificase que  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{\sqrt{-3c}}{2}$ ,  $\lambda_3 = \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}}$ , o subfibrado  $T_{\lambda_2} \ominus \mathbb{R}U_2$  é real e  $J(T_{\lambda_2} \ominus \mathbb{R}U_2) \subset T_{\lambda_3} \ominus \mathbb{R}A$ .

*Observación 4.21.* A escolla do natural  $k$  feita no último apartado do teorema anterior (aínda que pareza artificial a primeira vista) vai ser útil para, na demostración do Teorema Principal, abordar un estudo o máis uniforme posible das posibles subvariedades focais (ou hipersuperficies equidistantes) de  $M$ . En concreto, para un certo valor de  $r$ , a aplicación  $\Phi^r : M \rightarrow \mathbb{C}H^n$  dada por  $\Phi^r(p) = \exp_p(r\xi_p)$  terá rango constante igual a  $2n - k$  (equivalentemente, o núcleo da súa diferencial terá dimensión  $k - 1$ ), co cal  $\Phi^r(M)$  será localmente unha subvariedade de codimensión  $k$ . Consúltese a seguinte sección para máis detalles.

O seguinte corolario permitiranos prescindir, de aquí en diante, da hipótese da orientabilidade de  $M$ .

**Corolario 4.22.** *Sexa  $M$  unha hipersuperficie real conexa de  $\mathbb{C}H^n$ ,  $n \geq 2$ , verificando que todo campo unitario normal definido localmente  $\xi$  sexa tal que  $J\xi$  teña proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvatura. Entón  $M$  é orientable.*

*Demostración.* Podemos aplicar o Teorema 4.20 a cada aberto orientable conexo  $\mathcal{U}$  de  $M$  (por exemplo a cada aberto coordenado conexo). Denotemos por  $\xi^{\mathcal{U}}$  o campo unitario normal definido en  $\mathcal{U}$  e por  $\lambda_i^{\mathcal{U}}$ ,  $i = 1, \dots, g$ , as curvaturas principais de  $\mathcal{U}$ . Para cada  $\mathcal{U}$ , suporemos que se escolleu un sentido de  $\xi^{\mathcal{U}}$  e unha ordenación das curvaturas principais  $\lambda_i^{\mathcal{U}}$  acorde co Teorema 4.20. Posto que  $M$  é conexa,  $\lambda_3^{\mathcal{U}} \geq 0$  non depende do aberto  $\mathcal{U}$ , xa que  $T_{\lambda_3}$  é o único espazo de curvatura que admite un campo  $A$  nas condicións do Teorema 4.20. E como o resto das curvaturas principais se obteñen a partir de  $\lambda_3$ , ningunha delas depende do aberto  $\mathcal{U}$ .

Supoñamos que  $\lambda_3 > 0$ . Sexan  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}'$  dous abertos coordenados conexos tales que  $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$ . Nesta intersección  $\xi^{\mathcal{U}} = \xi^{\mathcal{U}'}$  (do contrario  $\lambda_3$  cambiaría de signo aí). Por tanto, os campos  $\xi^{\mathcal{U}}$  definen un campo unitario normal  $\xi$  sobre todo  $M$ .

Supoñamos agora que  $\lambda_3 = 0$ . Entón,  $g = 3$ ,  $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{-c}}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{\sqrt{-c}}{2}$ . Sexan  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}'$  dous abertos coordenados conexos tales que  $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$ . Nesta intersección  $\xi^{\mathcal{U}} = \xi^{\mathcal{U}'}$  (do contrario  $\lambda_1 < 0$  cambiaría de signo aí). Por tanto, os campos  $\xi^{\mathcal{U}}$  definen un campo unitario normal  $\xi$  sobre todo  $M$ .

En todo caso, conclúese que  $M$  é orientable.  $\square$

### 4.2.6. Teoría de campos de Jacobi e rixidez das variedades focais

Nesta sección demostraremos o Teorema Principal, valéndonos para iso dos resultados conseguidos ata o de agora, así como da teoría estándar de campos de vectores de Jacobi.

Sexa  $M$  unha hipersuperficie real conexas en  $\bar{M}^n(c)$  con  $g \geq 2$  curvaturas principais constantes e tal que todo campo unitario normal definido localmente sobre  $M$  verifique que  $J\xi$  ten proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvatura. Polo Teorema 4.20, só hai que tratar o caso  $c < 0$ , é dicir, o do espazo hiperbólico complexo  $\mathbb{C}H^n$ .

Polo Corolario 4.22,  $M \subset \mathbb{C}H^n$  é orientable. Sexa, pois  $\xi$  un campo unitario normal a  $M$  tal que  $J\xi$  ten proxección non trivial sobre exactamente dous espazos de curvatura. Usaremos as notacións da sección anterior xunto coa información recollida no Teorema 4.20.

O Teorema Principal seguirase dun estudo dos posibles conxuntos focais e hipersuperficies equidistantes de  $M$ , estudo que realizaremos mediante a teoría dos campos de vectores de Jacobi.

Para  $r \in \mathbb{R}$ , consideremos a aplicación diferenciable  $\Phi^r: M \rightarrow \mathbb{C}H^n$  definida por  $\Phi^r(p) = \gamma_p(r) = \exp_p(r\xi_p)$ , para  $p \in M$ , onde  $\exp_p$  é a aplicación exponencial de  $\mathbb{C}H^n$  en  $p$ . Para  $v \in T_p\mathbb{C}H^n$ , denotaremos por  $B_v$  o campo de vectores paralelo ó longo da xeodésica  $\gamma_p$  determinado pola condición  $B_v(0) = v$ , e, se  $v \in T_pM$ , denotaremos por  $\zeta_v$  o campo de Jacobi ó longo de  $\gamma_p$  con condicións iniciais  $\zeta_v(0) = v$  e  $\zeta'_v(0) = -S_p v$ . O campo  $\zeta_v$  cumpre a ecuación de Jacobi e, entón, é a única solución da ecuación diferencial lineal

$$(4.29) \quad 4\zeta_v'' + c\zeta_v + 3c \langle \zeta_v, J\dot{\gamma}_p \rangle J\dot{\gamma}_p = 0, \quad \zeta_v(0) = v, \quad \zeta'_v(0) = -S_p v,$$

onde  $\dot{\gamma}_p$  denota o campo vectorial tanxente a  $\gamma_p$  e a prima ' indica a derivada covariante dun campo de vectores ó longo dunha curva. Sexa  $\alpha$  calquera curva diferenciable en  $M$  con  $\dot{\alpha}(0) = v$ ; entón  $\zeta_v$  é o campo de variación da variación  $V(t, s) = \exp_{\alpha(s)}(t\xi_{\alpha(s)})$ . Definimos a curva  $\alpha^r = \Phi^r \circ \alpha$ , e un campo de vectores  $\eta^r$  ó longo de  $\alpha^r$  mediante  $\eta^r(\alpha(s)) = \dot{\gamma}_{\alpha(s)}(r)$ . En xeral, usaremos a notación  $\eta^r(p)$  para denotar  $\dot{\gamma}_p(r)$ ; obsérvese que  $\eta^r(p)$  non é un vector tanxente en  $p$ , senón en  $\Phi^r(p) = \gamma_p(r)$ .

Por tanto, pola teoría xeral dos campos de vectores de Jacobi e denotando por  $\bar{\nabla}_s \eta^r$  a derivada covariante do campo  $\eta^r$  definido ó longo da curva  $\alpha^r$ , téñense as seguintes relacións

$$\zeta_v(r) = \Phi_*^r v, \quad \zeta'_v(r) = (\bar{\nabla}_s \eta^r)(0).$$

En caso de que  $v$  sexa un autovector asociado a unha curvatura principal, podemos resolver a ecuación diferencial (4.29) facilmente. Así, se  $v \in T_{\lambda_i}(p)$  temos a seguinte expresión explícita

$$\zeta_v(t) = f_i(t)B_v(t) + \langle v, J\xi \rangle g_i(t)J\dot{\gamma}_p(t),$$

onde

$$f_i(t) = \cosh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right) - 2\frac{\lambda_i}{\sqrt{-c}} \sinh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right),$$

$$g_i(t) = \left(\cosh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right) - 1\right) \left(1 + 2\cosh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right) - 2\frac{\lambda_i}{\sqrt{-c}} \sinh\left(\frac{t\sqrt{-c}}{2}\right)\right).$$



Estamos interesados en calcular os puntos focais da hipersuperficie  $M$ , se é que os hai. Estes son precisamente as singularidades de  $\Phi^r$ , que poden calcularse, usando campos de vectores de Jacobi, a partir da ecuación  $\zeta_v(r) = \Phi_*^r v$ .

De aquí en diante asumiremos as suposicións, notacións e conclusións do Teorema 4.20.

O que veremos é que, se  $k > 1$ , existe unha certa distancia  $r$  para a cal a aplicación  $\Phi^r$  ten rango constante  $2n - k$ . Isto significará que a imaxe de  $\Phi^r$  forma localmente unha subvariedade de codimensión  $k$ . Despois botaremos man da ecuación  $\zeta'_v(r) = \bar{\nabla}_s \eta^r$  para obter información sobre a segunda forma fundamental desta subvariedade. Se  $k = 1$ , para toda distancia  $r$  a imaxe de  $\Phi^r$  forma localmente unha hipersuperficie, pero atoparemos unha certa distancia para a cal esta hipersuperficie será unha hipersuperficie real minimal do tipo  $W^{2n-1}$ .

Se  $\lambda_3 = 0$ , entón  $g = 3$ ,  $k = 1$ ,  $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{-c}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\sqrt{-c}}{2}$ ,  $b_1 = b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . O campo  $Z = -JA$  é tanxente á distribución complexa maximal de  $M$  e o fibrado normal a  $M$  é totalmente real (pois ten rango 1). Ademais, debido a que  $\lambda_3 = 0$ , a que  $\{Z, J\xi\}$  é unha base de  $T_{\lambda_1} \oplus T_{\lambda_2}$  e a que

$$\langle II(Z, J\xi), \xi \rangle = -\langle SJA, J\xi \rangle = \frac{\sqrt{-c}}{2},$$

séguese que a segunda forma fundamental de  $M$  vén dada pola extensión bilineal simétrica de  $II(Z, J\eta) = \frac{\sqrt{-c}}{2}\eta$ , para todo  $\eta \in \Gamma(\nu M)$ . Polo Teorema 2.15 concluímos que  $M$  é holomorficamente congruente a unha parte aberta da hipersuperficie minimal regrada  $W^{2n-1}$ .

Centrémonos agora no caso  $\lambda_3 \neq 0$ . Posto que  $0 < \lambda_3 < \frac{\sqrt{-c}}{2}$ , podemos considerar o número real  $r > 0$  tal que  $\lambda_3 = \frac{\sqrt{-c}}{2} \tanh\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right)$ . Entón, se  $g = 4$ ,  $\lambda_4 = \frac{\sqrt{-c}}{2} \coth\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right)$ . Nótese tamén que, se  $k > 1$ , entón  $g = 3$  se, e só se,  $\lambda_3 = \frac{\sqrt{-c}}{2\sqrt{3}}$  se, e só se,  $r = \frac{1}{\sqrt{-c}} \ln(2 + \sqrt{3})$ .

Sexa  $p \in M$ . Poñamos  $u_i = (U_i)_p$  para  $i = 1, 2$ . Para cada  $v \in T_p M$  denotaremos por  $v_i$  a proxección ortogonal de  $v$  sobre  $T_{\lambda_i}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, g\}$ . Sexa entón  $v = \sum_{i=1}^g v_i \in T_p M$ . Empregando a ecuación  $\zeta_v(r) = \Phi_*^r v$  e a expresión explícita para os campos de vectores de Jacobi, deducimos que

$$\begin{aligned} \Phi_*^r v &= \sum_{i=1}^g \Phi_*^r v_i = ((f_1(r) + b_1^2 g_1(r)) \langle v_1, u_1 \rangle + b_1 b_2 g_2(r) \langle v_2, u_2 \rangle) B_{u_1}(r) \\ &\quad + ((f_2(r) + b_2^2 g_2(r)) \langle v_2, u_2 \rangle + b_1 b_2 g_1(r) \langle v_1, u_1 \rangle) B_{u_2}(r) \\ &\quad + \operatorname{sech}\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right) B_{v_3}(r). \end{aligned}$$

Dito doutro xeito:

$$\begin{aligned} \Phi_*^r v_2 &= 0 && \text{para todo } v_2 \in T_{\lambda_2}(p) \ominus \mathbb{R}(U_2)_p, \text{ se } g = 3 \text{ e } k > 1, \\ \Phi_*^r v_3 &= \operatorname{sech}\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right) B_{v_3}(r) && \text{para todo } v_3 \in T_{\lambda_3}(p), \\ \Phi_*^r v_4 &= 0 && \text{para todo } v_4 \in T_{\lambda_4}(p), \text{ se } g = 4, \end{aligned}$$

e

$$(\Phi_*^r u_1, \Phi_*^r u_2) = (B_{u_1}(r), B_{u_2}(r)) D(r),$$

onde

$$D(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) + b_1^2 g_1(t) & b_1 b_2 g_2(t) \\ b_1 b_2 g_1(t) & f_2(t) + b_2^2 g_2(t) \end{pmatrix}.$$

Posto que  $\det(D(r)) = \operatorname{sech}^3\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right)$ , e  $\operatorname{sech}\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right) \neq 0$  para todo  $r$ , concluímos que, en todo caso,  $\Phi_*^r$  ten rango constante e igual a  $2n - k$ . Isto quere dicir que, para todo punto en  $M$ , existe unha veciñanza aberta  $\mathcal{V}$  tal que  $\mathcal{W} = \Phi^r(\mathcal{V})$  é unha subvariedade mergullada de  $\mathbb{C}H^n$  de codimensión  $k$  e  $\Phi^r: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  é unha submersión (difeomorfismo, se  $k = 1$ ).

Sexa  $p \in \mathcal{V}$  e  $q = \Phi^r(p) \in \mathcal{W}$ . A expresión para a diferencial de  $\Phi^r$  que se indicou arriba mostra que o espazo tanxente  $T_q \mathcal{W}$  de  $\mathcal{W}$  en  $q$  se obtén por transporte paralelo de  $T_{\lambda_3}(p) \oplus \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2$  ó longo da xeodésica  $\gamma_p$  desde  $p = \gamma_p(0)$  ata  $q = \gamma_p(r)$ . En consecuencia, o espazo normal  $\nu_q \mathcal{W}$  de  $\mathcal{W}$  en  $q$  acádase mediante o transporte paralelo, ó longo de  $\gamma_p$  desde  $p$  ata  $q$ , de  $\mathbb{R}\xi_p \oplus (T_{\lambda_2}(p) \ominus \mathbb{R}u_2)$  en caso de que  $g = 3$ , e de  $\mathbb{R}\xi_p \oplus T_{\lambda_4}(p)$  en caso de que  $g = 4$ . Isto mostra que  $\mathcal{W}$  ten fibrado normal totalmente real. En efecto, se  $g = 4$ , dado que  $J\xi \perp T_{\lambda_4}$  e  $T_{\lambda_4}$  é real, séguese que  $\mathbb{R}\xi_p \oplus T_{\lambda_4}(p)$  é real e, entón, tamén o é o seu transportado paralelo  $\nu_q \mathcal{W}$ , xa que  $\mathbb{C}H^n$  é unha variedade de Kähler (co cal a estrutura complexa e o transporte paralelo conmutan). Se  $g = 3$  o razoamento é análogo, cambiando  $T_{\lambda_4}$  por  $T_{\lambda_2} \ominus \mathbb{R}U_2$ .

Por outra banda,  $\eta^r(p) = B_{\xi_p}(r)$  é un vector unitario normal a  $\mathcal{W}$  en  $q$ . Pola teoría xeral dos campos de vectores de Jacobi no marco da teoría de subvariedades, o operador de configuración  $S^r$  de  $\mathcal{W}$  cumpre que

$$S_{\eta^r(p)}^r \Phi_*^r v = -(\bar{\nabla}_{\Phi_*^r v} \eta^r)^\top = -(\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}^r(0)} \eta^r)^\top = -((\bar{\nabla}_s \eta^r)(0))^\top = -(\zeta'_v(r))^\top,$$

para todo  $v \in T_p M$  con  $\Phi_*^r v \neq 0$ , e denotando por  $(\cdot)^\top$  a compoñente tanxente a  $\mathcal{W}$ . Usemos agora a expresión explícita para os campos de vectores de Jacobi. Posto que  $f'_3(r) = 0$ , obtemos que

$$(4.30) \quad S_{\eta^r(p)}^r B_{v_3}(r) = 0 \quad \text{para todo } v_3 \in T_{\lambda_3}(p).$$

E para  $v = u_1$  e  $v = u_2$  temos que

$$(S_{\eta^r(p)}^r B_{u_1}(r), S_{\eta^r(p)}^r B_{u_2}(r)) = (B_{u_1}(r), B_{u_2}(r)) C(r),$$

onde puxemos  $C(r) = -D'(r)D(r)^{-1}$ . Despois dun longo proceso de operacións elementais, obtemos que

$$C(r) = \frac{\sqrt{-c}}{2} \begin{pmatrix} -2b_1 b_2 & b_1^2 - b_2^2 \\ b_1^2 - b_2^2 & 2b_1 b_2 \end{pmatrix}.$$

Polo feito na sección anterior, podemos considerar  $JA_p = b_2 u_1 - b_1 u_2$  e  $J\xi_p = b_1 u_1 + b_2 u_2$ , vectores que constitúen unha base ortonormal de  $\mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2 \subset T_p M$ . Posto que o transporte paralelo é lineal, tense que

$$\begin{aligned} B_{JA_p}(r) &= b_2 B_{u_1}(r) - b_1 B_{u_2}(r), \\ J\eta^r(p) &= B_{J\xi_p}(r) = b_1 B_{u_1}(r) + b_2 B_{u_2}(r). \end{aligned}$$

Todo isto implica que:

$$(4.31) \quad S_{\eta^r(p)}^r B_{JA_p}(r) = -\frac{\sqrt{-c}}{2} J\eta^r(p), \quad S_{\eta^r(p)}^r J\eta^r(p) = -\frac{\sqrt{-c}}{2} B_{JA_p}(r),$$

e  $S_{\eta^r(p)}^r$  anulase no complemento ortogonal de  $\mathbb{R}J\eta^r(p) \oplus \mathbb{R}B_{JA_p}(r)$  en  $T_q\mathcal{W}$ .

Diferenciemos agora o caso  $g = 3, k = 1$  dos casos  $g = 3, k > 1$  e  $g = 4$ .

■ **Caso  $g = 3, k = 1$ .**

Posto que  $\Phi^r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  neste caso é un difeomorfismo,  $\mathcal{W}$  é unha hipersuperficie, logo ten fibrado normal de rango 1. Designando  $z = -B_{JA_p}(r)$  temos que:

$$S_{\eta}^r J\eta = \frac{\sqrt{-c}}{2} \|\eta\|^2 z, \quad S_{\eta}^r z = \frac{\sqrt{-c}}{2} J\eta, \quad S_{\eta}^r v = 0,$$

para todo  $\eta \in \nu_q\mathcal{W}$ ,  $v \in T_q\mathcal{W} \ominus (\mathbb{R}J\eta \oplus \mathbb{R}z)$ .

■ **Casos  $g = 3, k > 1$  e  $g = 4$ .**

Xa que  $J(\nu_q\mathcal{W} \ominus \mathbb{R}\eta^r(p))$  está contido no transportado paralelo de  $T_{\lambda_3}(p)$  ó longo de  $\gamma_p$  desde  $p$  ata  $q$  (pois  $\nu_q\mathcal{W} \ominus \mathbb{R}\eta^r(p)$ , como xa vimos, é o transportado paralelo de  $T_{\lambda_2}(p) \ominus \mathbb{R}u_2$ , se  $g = 3$ , e de  $T_{\lambda_4}(p)$ , se  $g = 4$ ), (4.30), (4.31) e a linealidade de  $S_{\eta^r(p)}^r$  mostran que

$$(4.32) \quad S_{\eta^r(p)}^r J\tilde{\eta} = -\frac{\sqrt{-c}}{2} \langle \eta^r(p), \tilde{\eta} \rangle B_{JA_p}(r) \quad \text{para todo } \tilde{\eta} \in \nu_q\mathcal{W}.$$

En particular,  $S_{\eta^r(p)}^r J\tilde{\eta} = 0$  para todo  $p \in \mathcal{V}$  e  $\tilde{\eta} \in \nu_q\mathcal{W} \ominus \mathbb{R}\eta^r(p)$ . Pola ecuación de Gauß e mais por  $\bar{\nabla}J = 0$  temos que para todo  $X \in T_q\mathcal{W}$

$$\begin{aligned} \langle S_{\tilde{\eta}}^r J\eta^r(p), X \rangle &= \langle II(X, J\eta^r(p)), \tilde{\eta} \rangle = \langle \bar{\nabla}_X J\eta^r(p), \tilde{\eta} \rangle = \langle \eta^r(p), \bar{\nabla}_X J\tilde{\eta} \rangle \\ &= \langle \eta^r(p), II(X, J\tilde{\eta}) \rangle = \langle S_{\eta^r(p)}^r J\tilde{\eta}, X \rangle, \end{aligned}$$

de onde se quita que  $S_{\tilde{\eta}}^r J\eta^r(p) = S_{\eta^r(p)}^r J\tilde{\eta}$  e, por tanto,

$$(4.33) \quad S_{\tilde{\eta}}^r J\eta^r(p) = 0 \quad \text{para todo } \tilde{\eta} \in \nu_q\mathcal{W} \ominus \mathbb{R}\eta^r(p).$$

Agora consideremos unha curva calquera  $\alpha$  en  $(\Phi^r)^{-1}(\{q\}) \cap \mathcal{V}$  con  $\alpha(0) = p$ . Dado que os vectores  $\eta^r(p)$  e  $\eta^r(\alpha(s)) - \langle \eta^r(\alpha(s)), \eta^r(p) \rangle \eta^r(p)$  son perpendiculares, (4.33), a linealidade de  $\eta \mapsto S_{\eta}^r$  e (4.32) implican

$$0 = S_{\eta^r(\alpha(s)) - \langle \eta^r(\alpha(s)), \eta^r(p) \rangle \eta^r(p)}^r J\eta^r(p) = S_{\eta^r(\alpha(s))}^r J\eta^r(p) + \frac{\sqrt{-c}}{2} \langle \eta^r(\alpha(s)), \eta^r(p) \rangle B_{JA_p}(r).$$

Por outra banda, (4.32) con  $\alpha(s)$  en lugar de  $p$  dinos que

$$S_{\eta^r(\alpha(s))}^r J\eta^r(p) = -\frac{\sqrt{-c}}{2} \langle \eta^r(\alpha(s)), \eta^r(p) \rangle B_{JA_{\alpha(s)}}(r).$$

As dúas últimas igualdades indicannos que a aplicación  $\tilde{p} \mapsto B_{JA_{\tilde{p}}}(r)$  é constante na compoñente conexa  $\mathcal{V}_0$  de  $(\Phi^r)^{-1}(\{q\}) \cap \mathcal{V}$  que contén a  $p$ . Sexa  $z = -B_{JA_{\tilde{p}}}(r) \in T_q\mathcal{W}$ , para todo  $\tilde{p}$ , ese valor constante. Obsérvese que  $z$  é un vector unitario, pois obtense por transporte paralelo do vector unitario  $-JA_p$ .

Podemos considerar a aplicación diferenciable  $\eta^r$  de  $\mathcal{V}_0$  na esfera unidade de  $\nu_q\mathcal{W}$ , definida por  $p \mapsto \eta^r(p)$ . Calculemos a súa diferencial  $\eta_{*p}^r$ . Os vectores tanxentes a  $\mathcal{V}_0$  en  $p$  son precisamente os de  $\ker \Phi_{*p}$  e estes, como xa vimos, son os vectores de  $T_{\lambda_2}(p) \ominus \mathbb{R}u_2$ , se  $g = 3$ , ou de  $T_{\lambda_4}(p)$ , se  $g = 4$ .

Para cada  $v \in T_{\lambda_2}(p) \ominus \mathbb{R}u_2$ , se  $g = 3$  e  $k > 1$ , (respectivamente,  $v \in T_{\lambda_4}(p)$ , se  $g = 4$ ) consideremos unha curva  $\alpha$  nas condicións descritas máis arriba xunto coa condición  $\dot{\alpha}(0) = v$ . A curva  $\alpha^r = \Phi^r \circ \alpha$  é unha curva constante: redúcese ó punto  $q$ . E a curva  $\eta^r(\alpha(s))$  é unha curva na esfera unidade de  $\nu_q\mathcal{W}$ . O seu vector tanxente no punto  $\eta^r(p)$ , pensando a curva  $\eta^r(\alpha(s))$  como un campo de vectores sobre a curva constante  $\alpha^r(s)$ , é

$$\begin{aligned} \eta_{*p}^r v &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \eta^r(\alpha(s)) = (\bar{\nabla}_s \eta^r)(0) \\ &= \zeta'_v(r) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{-c}{2}} B_v(r) & \text{se } g = 3, k > 1, \\ -\operatorname{csch}\left(\frac{r\sqrt{-c}}{2}\right) B_v(r) & \text{se } g = 4, \end{cases} \end{aligned}$$

onde se tivo en conta, de novo, a teoría xeral dos campos de vectores de Jacobi no marco da teoría de subvariedades.

O anterior implica que  $\eta^r$  é un difeomorfismo local entre  $\mathcal{V}_0$  e a esfera unidade de  $\nu_q\mathcal{W}$ . Así,  $\eta^r(\mathcal{V}_0)$  é un subconxunto aberto da esfera unidade en  $\nu_q\mathcal{W}$ . Posto que  $S_\eta^r$  é unha aplicación lineal en  $\eta \in \nu_q\mathcal{W}$ ,  $S_\eta^r$  queda completamente determinada pola súa actuación nunha parte aberta da esfera unidade de  $\nu_q\mathcal{W}$ . Polo tanto, dado que (4.30) e (4.31) son válidas para todo  $p \in \mathcal{V}_0$ , deducimos que

$$S_\eta^r J\eta = \frac{\sqrt{-c}}{2} \|\eta\|^2 z, \quad S_\eta^r z = \frac{\sqrt{-c}}{2} J\eta, \quad S_\eta^r v = 0,$$

para todo  $\eta \in \nu_q\mathcal{W}$ ,  $v \in T_q\mathcal{W} \ominus (\mathbb{R}J\eta \oplus \mathbb{R}z)$ .

En calquera caso, séguese que a segunda forma fundamental  $II_q^r$  de  $\mathcal{W}$  en  $q$  vén dada pola extensión bilineal simétrica trivial de  $II_q^r(z, J\eta) = \frac{\sqrt{-c}}{2} \eta$  para todo  $\eta \in \nu_q\mathcal{W}$ . Podemos considerar o campo de vectores unitario  $Z$  sobre  $\mathcal{W}$  tal que, en cada  $q \in \mathcal{W}$ ,  $Z_q$  é o vector  $z$  que se determinou arriba; está ben definido, no primeiro caso porque  $\Phi|_{\mathcal{V}}$  é un difeomorfismo, e no segundo caso porque se viu que a aplicación  $\tilde{p} \mapsto B_{JA_{\tilde{p}}}(r)$  é constante na compoñente conexa  $\mathcal{V}_0$  de  $(\Phi^r)^{-1}(\{q\}) \cap \mathcal{V}$  que contén a  $p$ . Posto que  $Z_q = Z_{\Phi^r(p)} = -B_{JA_p}(r)$ , compróbase que  $Z$  é un campo de vectores diferenciable.

Polo xa visto, verifícase que a segunda forma fundamental  $II^r$  de  $\mathcal{W}$  vén dada pola extensión bilineal simétrica trivial de  $II^r(Z, J\eta) = \frac{\sqrt{-c}}{2} \eta$  para todo  $\eta \in \Gamma(\nu\mathcal{W})$ . Ademais,  $Z$  é tanxente á distribución complexa maximal de  $\mathcal{W}$ , pois  $JZ = -JB_{JA}(r) = -B_{J^2A}(r) = B_A(r)$ ,

que é outro campo tanxente a  $\mathcal{W}$  (xa que  $A \in \Gamma(T_{\lambda_3})$ ). Recordando que xa probamos que a subvariedade  $(2n - k)$ -dimensional  $\mathcal{W}$  ten fibrado normal real, o Teorema 2.15 permítenos afirmar que  $\mathcal{W}$  é unha subvariedade de  $\mathbb{C}H^n$  holomorficamente congruente a unha parte aberta da subvariedade minimal regradada  $W^{2n-k}$ .

Entón  $\Phi^r(M)$  é holomorficamente congruente a unha unión de subconxuntos  $\mathcal{W}$  que son partes abertas de órbitas de accións isométricas sobre  $\mathbb{C}H^n$ . Pola conexidade de  $\Phi^r(M)$  e a analiticidade das órbitas de accións isométricas sobre  $\mathbb{C}H^n$ , podemos concluír que  $\Phi^r(M)$  é holomorficamente congruente a unha parte aberta dunha soa órbita dunha acción isométrica, neste caso, dunha subvariedade minimal regradada  $W^{2n-k}$ .

Así, o que vimos é que  $M$  se atopa, se  $k > 1$ , nun tubo de radio  $r$  ó redor dunha subvariedade minimal regradada holomorficamente congruente a  $W^{2n-k}$ , e, se  $k = 1$ , nunha hipersuperficie equidistante a unha hipersuperficie minimal regradada holomorficamente congruente a  $W^{2n-1}$ . E isto equivale a que  $M$  sexa holomorficamente congruente a unha parte aberta do tubo de radio  $r$  ó redor de  $W^{2n-k}$  (se  $k > 1$ ) ou dunha hipersuperficie equidistante a  $W^{2n-1}$  (se  $k = 1$ ).

Isto conclúe a demostración do Teorema Principal.



# Bibliografía

- [1] U. Abresch: Isoparametric hypersurfaces with four or six distinct principal curvatures. Necessary conditions on the multiplicities, *Math. Ann.* **264** (1983), 283–302.
- [2] J. F. Adams: *Lectures on exceptional Lie groups*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, 1996.
- [3] L. Bérard-Bergery: Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein, *Inst. Élie Cartan*, **6** (1982), 1–60.
- [4] J. Berndt: Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic space, *J. Reine Angew. Math.* **395** (1989), 132–141.
- [5] J. Berndt: Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces, *Math. Z.* **229** (1998), 589–600.
- [6] J. Berndt, M. Brück: Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces, *J. Reine Angew. Math.* **541** (2001), 209–235.
- [7] J. Berndt, S. Console, C. Olmos: *Submanifolds and holonomy*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics **434**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.
- [8] J. Berndt, J. C. Díaz-Ramos: Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic spaces, *J. London Math. Soc.* **74** (2006), 778–798.
- [9] J. Berndt, J. C. Díaz-Ramos: Real hypersurfaces with constant principal curvatures in the complex hyperbolic plane, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), 3349–3357.
- [10] J. Berndt, J. C. Díaz-Ramos: Homogeneous hypersurfaces in complex hyperbolic spaces, *Geom. Dedicata* **138** (2009), 129–150.
- [11] J. Berndt, H. Tamaru: Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 3425–3438.
- [12] J. Berndt, F. Tricerri, L. Vanhecke: *Generalized Heisenberg groups and Damek–Ricci harmonic spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1598**, Springer–Verlag, Berlin, 1995.
- [13] É. Cartan: Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, *Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser.* **17** (1938), 177–191.

- [14] T. E. Cecil, Q.-S. Chi, G. Jensen: Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, *Ann. of Math. (2)* **166** (2007), no. 1, 1–76.
- [15] T. E. Cecil, P. J. Ryan: Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **269** (1982), 481–499.
- [16] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez: Non-Hopf real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex space forms, preprint arXiv:0911.3624v1 [math.DG] (a aparecer en *Indiana Univ. Math. J.*).
- [17] J. Dorfmeister, E. Neher: Isoparametric hypersurfaces, case  $g = 6$ ,  $m = 1$ , *Commun. Algebra* **13** (1985), 2299–2368.
- [18] P. Eberlein: *Geometry of nonpositively curved manifolds*, University of Chicago Press, 1996.
- [19] D. Ferus, H. Karcher, H. F. Münzner: Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen, *Math. Z.* **177** (1981), 479–502.
- [20] A. Gray: *Tubes*, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [21] K. Grove, W. Ziller: Curvature and symmetry of Milnor spheres, *Ann. of Math.*, **152** (2000), 331–367.
- [22] T. Hamada, Y. Hoshikawa, H. Tamaru: Curvature properties of Lie hypersurfaces in the complex hyperbolic space, preprint arXiv:0908.3419 [math.DG].
- [23] S. Helgason: *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.
- [24] W.-Y. Hsiang, H. B. Lawson Jr.: Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Differential Geom.* **5** (1971), 1–38.
- [25] S. Immervoll: On the classification of isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures in spheres, *Ann. of Math. (2)* **168** (2008), 1011–1024.
- [26] M. Kimura: Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 137–149.
- [27] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*, Vol. II, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics **15**, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.
- [28] A. W. Knap: *Lie groups beyond an introduction*, Second Edition, Progress in Mathematics **140**, Birkhäuser, 2002.
- [29] T. Levi-Civita: Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6)* **26** (1937), 355–362.



- 
- [30] M. Lohnherr: *On ruled real hypersurfaces of complex space forms*, PhD Thesis, University of Cologne, 1998.
- [31] M. Lohnherr, H. Reckziegel: On ruled real hypersurfaces in complex space forms, *Geom. Dedicata* **74** (1999), 267–286.
- [32] S. Montiel: Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space, *J. Math. Soc. Japan* **37** (1985), 515–535.
- [33] H. F. Münzner: Isoparametrische Hyperflächen in Sphären, *Math. Ann.* **251** (1980), 57–71.
- [34] R. Niebergall, P. J. Ryan: Real Hypersurfaces in Complex Space Forms, *Tight and Taut Submanifolds*, MSRI Publications, Volume **32**, 1997.
- [35] B. O’Neill: The fundamental equations of a submersion, *Michigan Math. J.* **13** (1966), 459–469.
- [36] B. O’Neill: *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, 1983.
- [37] A. L. Onishchik, E. B. Vinberg: *Lie Groups and Lie Algebras III*, Springer, 1994.
- [38] P. Petersen: *Riemannian Geometry*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics **171**, Springer, 2006.
- [39] T. Sakai: *Riemannian Geometry*, Providence, RI, 1996.
- [40] B. Segre: Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6)* **27** (1938), 203–207.
- [41] M. Sepansky: *Compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics **235**, Springer, 2007.
- [42] R. Takagi: On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space, *Osaka J. Math.* **10** (1973), 495–506.
- [43] R. Takagi: Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 43–53.
- [44] R. Takagi: Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures, II, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 507–516.
- [45] G. Thorbergsson: A survey on isoparametric hypersurfaces and their generalizations, *Handbook of differential geometry, Vol. I*, North-Holland, Amsterdam (2000), 963–995.

- 
- [46] Q. M. Wang: Isoparametric hypersurfaces in complex projective spaces, *Proc. 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations* **3**, Science Press, Beijing (1982), 1509–1523.
- [47] Q. M. Wang: Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex projective spaces (I), *Sci. Sinica Ser. A* **26** (1983), 1017–1024.
- [48] B. Wilking: Positively curved manifolds with symmetry, *Ann. of Math.*, **163** (2006), 607–668.
- [49] K. Yano, M. Kon: *Structures on manifolds*, Series in Pure Math. **3**, World Scientific, Singapore, 1984.

## Publicacións do departamento de Xeometría e Topoloxía

- 95** A. RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ *Cohomoloxía das foliacións riemannianas con follas densas. Cohomoloxía de Alexander-Spanier de foliacións compactas Hausdorff*. Tesiña de Licenciatura (2001) ISBN: 84-89390-12-6
- 96** M. FERNÁNDEZ LÓPEZ *Resultados de descomposición asociados á ecuación de Möbius*. Tese de Doutoramento (2002) ISBN: 84-89390-13-4
- 97** J. C. DÍAZ RAMOS *Curvaturas totais de esferas xeodésicas*. Tesiña de Licenciatura (2002) ISBN: 84-89390-14-2
- 98** M. F. GONZÁLEZ LÁZARO *Resolución de singularidades en acciones polares*. DEA (2003) ISBN: 84-89390-16-9
- 99** A. SOTELO ARMESTO *El grupo de difeomorfismos del espacio de hojas de una foliación de Lie desde el punto de vistas difeológico*. Tesiña de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-15-0
- 100** M. BROZOS VÁZQUEZ *Varietades semi-riemannianas con tensor de curvatura especial*. Tesiña de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-18-5
- 101** J. C. DÍAZ RAMOS *Caracterización de variedades riemannianas mediante curvaturas escalares totais de esferas xeodésicas*. DEA (2003) ISBN: 84-89390-17-7
- 102** M. T. PÉREZ LÓPEZ *Campos de vectores harmónicos-Killing*. Tese de Doutoramento (2003) ISBN: 84-89390-19-3
- 103** I. GARCÍA RAMÍREZ *Aplicación de las formulas de Bochner al estudio de variedades 4-dimensionales doblemente casi-hermíticas*. DEA (2003) ISBN: 84-89390-20-7
- 104** A. MARTÍN MÉNDEZ *Álgebras de Lie graduadas y estructuras de segundo orden asociadas*. Tese de Doutoramento (2004) ISBN: 84-89390-21-5
- 105** M. BROZOS VÁZQUEZ *Propiedades conformes de productos deformados*. DEA (2004) ISBN: 84-89390-22-3
- 106** J. C. DÍAZ RAMOS *Geometric consequences of intrinsic and extrinsic curvature conditions*. Tese de Doutoramento (2006) ISBN: 84-89390-23-1
- 107** P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos de Robinson*. Tesiña de Licenciatura (2006) ISBN: 84-89390-24-X
- 108** E. CALVIÑO LOUZAO *Varietades de Osserman e Ivanov-Petrova en dimensión cuatro*. DEA (2007) ISBN 978-84-89390-25-6

- 109 M. BROZOS VÁZQUEZ *Geometric consequences of algebraic conditions on curvature operators*. Tese de Doutoramento (2007) ISBN 978-84-89390-26-3
- 110 M. PÉREZ FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA *Número de ramificación de un pseudogrupo*. DEA (2007) ISBN 978-84-89390-27-0
- 111 P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos euclidianos*. DEA (2007) ISBN 84-89390-28-7
- 112 Á. LOZANO ROJO *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos*. Tese de Doutoramento (2008) ISBN 978-84-89390-29-4
- 113 M. J. PEREIRA SÁEZ *Aplicación traza, transformación de Cayley y categoría LS de los grupos de Lie clásicos*. DEA (2008) ISBN 978-84-89390-30-0
- 114 S. VILARIÑO FERNÁNDEZ *Nuevas aportaciones al estudio de los formalismos  $k$ -simpléctico y  $k$ -cosimpléctico*. Tese de Doutoramento (2009) ISBN 978-84-89390-31-7
- 115 S. GAVINO FERNÁNDEZ *Estudo do tensor de curvatura ó longo de xeodésicas e círculos en variedades de Walker*. DEA (2009) ISBN 978-84-89390-32-4
- 116 C. MENIÑO COTÓN *Categoría LS en espacios medibles foliados con medida transversa invariante*. DEA (2010) ISBN 978-84-89390-33-1
- 117 A. A. CORTÉS AYASO *Métricas de Walker: estructura simpléctica das variedades de Osserman*. DEA (2010) ISBN 978-84-89390-34-8