1) La velocidad de variación de una población de bacterias con recursos limitados viene dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -2(x-5),$$

donde x es el "número de bacterias (en millones)" y t es el "tiempo transcurrido (en horas)". Inicialmente hay 1 millón de bacterias.

(a) Hallar la función que expresa x en función de t, resolviendo la ecuación diferencial.
(b) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 2 horas? ¿Cuántas habrá a largo plazo?

2) Calcula las siguientes integrales indefinidas. Se trata de integrales inmediatas, es decir, se pueden calcular sin más que hacer alguna manipulación o ajustar alguna constante, o con un cambio de variables obvio.

(a) $\displaystyle\int (6\,x^2-8)^{25}\,x\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,x^2+8}$ (c) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x+2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2\,e^x-1}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+8}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+4}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$ (i) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x^2\,dx.$

3) Calcula las integrales indefinidas siguientes por el método de integración por partes:

(a) $\displaystyle\int x\,\ln x\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^2\,\operatorname{sen} x\,dx$ (c) $\displaystyle\int s\,2^s\,ds$ (d) $\displaystyle\int \cos(2\,x)\,e^{3\,x}\,dx.$

4) Calcula la derivada de las funciones siguientes:

(a) $F(x)=\int_0^x (\operatorname{sen} t^2)\,\ln(1+t^2)\,dt$ (b) $G(x)=\int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2)\,\ln(1+t^2)\,dt$

5) Calcula las siguientes integrales indefinidas de funciones trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2(ax)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos^2 x}$ (d) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(2\,x)\,dx.$

6) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[4]{x}}x^2\,dx$ (b) $\displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int t^2e^t\,dt$ (d) $\displaystyle\int e^{\cos t}\operatorname{sen} 2t\,dt$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$ (f) $\displaystyle\int \cos x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$ (g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 t\,dt$ (h) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx.$

7) Calcula las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x-2|x|)$ (b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T-\alpha)\,dt$ (f) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\operatorname{sen} x}{1+x^6}\,dx.$

8) Calcula el área delimitada por las curvas siguientes:

(a) $y=\operatorname{sen} x,\ x=\dfrac{\pi}{3},\ x=\dfrac{\pi}{2},\ y=0$ (b) $y=5-x^2,\ y=3-x$

(c) $y=6x-x^2,\ y=x^2-2x$ (d) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1.$

9) La región (infinita) encerrada entre $y = 0$ y la gráfica de la función $y = 1/x^2$ entre $x = 1$ e infinito tiene área finita. ¿Cuánto vale dicha área?

Ayuda. Calcula el área entre $x = 1$ y $x = N$ y luego haz el límite cuando $N \to \infty$.

10) ¿Es finita el área de la región comprendida entre $y = 0$ e $y = 1/x$ de $x = 1$ en adelante? ¿Y si se cambia $1/x$ por e^{-x}?

11) Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con velocidad $v(t) = t(1 - t)$ unidades por segundo. Su posición inicial es 2 unidades a la izquierda del origen.

(a) Halla la posición del objeto 10 segundos más tarde.
(b) Halla la distancia total recorrida por el objeto en esos 10 segundos.

12) Una partícula se mueve a lo largo del eje x con velocidad $v(t) = At^2 + 1$, expresada en metros por segundo. Calcula A sabiendo que $x(1) = x(0)$. Halla la distancia total recorrida por la partícula durante el primer segundo.

13) El tamaño $N(t)$ de una población varía a lo largo del tiempo. Su velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{30\, e^{-0.1\, t}}{(1 + 3\, e^{-0.1\, t})^2} \qquad (t = \text{tiempo en años}).$$

a) Calcula la variación de la población entre $t = 0$ y $t = 20$.
b) Si $N(0) = 25$, ¿cuál es el tamaño de la población al cabo de 20 años?

14) Se observa que la velocidad de variación del número de individuos de una población viene dada por:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}(x - 100)(200 - x).$$

Inicialmente hay $x(0) = 180$ individuos.
a) Hallar la función $x(t)$.
b) Calcular en qué valor tiende a estabilizarse la población cuando el tiempo crece.

15) Un tanque contiene inicialmente 100 litros de agua con sal. El contenido total de sal es de 1 kg. En un determinado momento, se comienza a sacar líquido del tanque, a razón de 3 litros por minuto (con lo cual, cada minuto, se pierde un 3 % de sal). Para que la cantidad total de líquido se mantenga constante, cada minuto se añaden 3 litros de otra solución salina cuyo contenido en sal es de 250 gramos por litro (con lo cual, cada minuto, se añaden 750 g de sal).
a) Hallar la cantidad de sal en el tanque, $S(t)$, en función del tiempo, a partir de la ecuación diferencial correspondiente.
b) Determinar el momento en que la solución del tanque contiene 13 kg de sal.
c) Calcular la cantidad de sal que habrá a largo plazo.

16) Durante una epidemia de gripe en una población, la velocidad de propagación de la enfermedad, es decir, la velocidad de variación del número de enfermos es (aproximadamente):

$$v(t) = 1000\ t\ e^{-0.5\, t}$$

donde t es el número de días desde el inicio de la epidemia.

(a) Calcula el número de individuos que se ponen enfermos durante los cuatro primeros días.
(b) ¿En qué momento es máxima la velocidad de propagación de la gripe?

17) Una piscifactoría coloca a los alevines de 1 centímetro de longitud en tanques especiales. Se estima que la velocidad de crecimiento de un alevín desde el instante en que se instala en dicho tanque viene dada, en tiempo t (meses) por $v(t) = \dfrac{16t}{(t^2 + 1)^2}$ (velocidad dada en centímetros por mes). ¿Qué tamaño tendrán los peces 3 meses después de ingresar en los tanques?

18) Calcula el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada.

(a) $y = 1 - x^2$, $y = 0$; alrededor del eje x.
(b) $y = x^3$, $y = x$, $x \geq 0$; alrededor del eje x.
(c) $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$; alrededor del eje y.
(d) $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; alrededor de $y = -1$.
(e) $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; alrededor de $x = 1$.
(f) $y = 2x^2 - x^3$, $y = 0$; alrededor del eje y.
(g) $y = e^{-x^2}$, $x = 0$, $x = 1$; alrededor del eje y.

19) Calcula el volumen de los siguientes sólidos:

(a) Un cono circular recto cuya altura es h y cuya base tiene radio r.
(b) Una pirámide de altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$.
(c) Una cuña de un cilindro circular de radio r definida por un plano ortogonal al eje del cilindro y otro plano que corta al primero en un ángulo de 30° a lo largo del diámetro del cilindro.

20) ¿Para qué valores de b el promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo $[0, b]$ es igual a 3?

21) La densidad lineal de una varilla de 8 m de longitud es $12/\sqrt{x+1}$ kg/m, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Calcula la densidad promedio de la varilla.

22) Calcula la longitud de las siguientes curvas:

(a) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq r$.
(b) $y^2 = 4(x+4)^3$, $0 \leq x \leq 2$, $y > 0$.
(c) $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \pi/3$.
(d) $y = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt$, $1 \leq x \leq 4$.

23) Halla el área de la superficie de revolución obtenida al hacer girar la curva dada alrededor de la recta especificada.

(a) $y = \sqrt{4 - r^2}$, $-1 \leq x \leq 1$; alrededor del eje x.
(b) $y = \operatorname{sen} \pi x$, $0 \leq x \leq 1$; alrededor del eje x.
(c) $y = x^2$ desde $(1, 1)$ hasta $(2, 4)$; alrededor del eje y.
(d) $y = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$; alrededor del eje y.