3) Sistemas del ejercicio 1) de la Hoja 3 (n denota el número de incógnitas):
(a) Compatible indeterminado, ya que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = 3 < n = 4$; soluciones en función de $n - \mathrm{rg}(A) = 4 - 3 = 1$ parámetro.
(b) Compatible determinado, ya que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = 3 = n$.
(c) Compatible determinado, ya que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = 4 = n$.
(d) Incompatible, ya que $\mathrm{rg}(A) = 3 < \mathrm{rg}(A') = 4$.
(e) Compatible indeterminado, ya que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = 2 < n = 4$; soluciones en función de $n - \mathrm{rg}(A) = 4 - 2 = 2$ parámetros.
(f) Compatible determinado, ya que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = 3 = n$.

4) B tiene rango 3 si, y sólo si, $m \neq -2$ o $p \neq \frac{1}{2}$. (Obs. No hay que olvidarse de comprobar que, si $m = -2$ y $p = \frac{1}{2}$, entonces B tiene rango 2.)

5) $\lambda = 3$.

6) $a = -1$ y $b = 1$.

7) **(a)** Es linealmente independiente, genera $\mathbb{R}^3$, y es una base de $\mathbb{R}^3$.
(b) No es linealmente independiente, sí genera $\mathbb{R}^2$, no es base de $\mathbb{R}^2$.
(c) Sí es linealmente independiente, no genera $\mathbb{R}^4$ ni es base de $\mathbb{R}^4$.
(d) No es linealmente independiente, no genera $\mathbb{R}^3$ ni es base de $\mathbb{R}^3$.

8) $\overrightarrow{u_2} = (0,1,0)_\beta = (0,0,1)_{\beta'} = (0,0,1)_{\beta''}$, $\quad \overrightarrow{u_1} - 3\overrightarrow{u_3} = (1,0,-3)_\beta = (-3,1,0)_{\beta'} = (-3,-1,0)_{\beta''}$.

9) $(1,0,3)$, $(1,1,2)$, $(a, x-\sqrt{2}, \sqrt{2}+x+a)$.

10) $(1,2,3) = (0,2,1)_\beta$, $(1,0,0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)_\beta$, $(1,-1,2) = (1,0,1)_\beta$.
Matriz de cambio de base de la base canónica a la base β: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Entonces, por ejemplo $P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11) $\overrightarrow{u} = (1,-2,-2)_\beta = (1,1,-1)_{\beta'}$, $\overrightarrow{v} = (0,0,-2)_\beta = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0)_{\beta'}$.
Matrices de cambio de base:
$P = P_{\mathcal{C}\to\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = Q_{\mathcal{C}\to\beta'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,
$R = R_{\beta\to\beta'} = QP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $S = S_{\beta'\to\beta} = R^{-1} = PQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

12) $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\quad \frac{\pi}{4}$.
$\angle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \frac{3\pi}{4}$, $\quad \angle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\quad \angle(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$.
$-\overrightarrow{u_2}$, $\quad -\overrightarrow{u_2}$.

13) $\left\{\left(a, \frac{1}{\sqrt{2}} - a, \pm\sqrt{-2a^2 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}}\right) : \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right\}$.
$(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$.
No.

14) No. No. Sí.

15) **(a)** $x + y - z = 0$ **(b)** $x - y = 0$ **(c)** $x + 2y - 3z = 0$.
(a') $x + y - z = -1$ **(b')** $x - y = 1$ **(c')** $x + 2y - 3z = -5$.

16) No están alineados, ya que por ejemplo $\overrightarrow{PQ} = (-1,-1,-1)$ y $\overrightarrow{PR} = (0,-1,-2)$ no son proporcionales (colineales). El área del triángulo es $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

17) Cualquier vector (a,b,c) tal que $5a - 3b + 2c = 0$. Hay infinitos, todos ellos se encuentran en el plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y que tiene al vector $(5,-3,2)$ como vector normal, es decir, el plano $5x - 3y + 2z = 0$.

18) $x - y = 0$.

20) **(a)** Sí es lineal, con matriz $(1,1,-1)$. **(b)** No. **(c)** No. **(d)** No.

(e) Sí, con matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **(f)** Sí, con matriz nula de orden 2×6.

21-22) **(a)** $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Autovalores 5 y 1 (éste con multiplicidad 2). Como el autovalor 1 sólo tiene un autovector (salvo coeficiente de proporcionalidad) a pesar de tener multiplicidad 2, deducimos que no es diagonalizable.

(e) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(f) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(a-1) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(g) Autovalores 1 (con multiplicidad 2) y -1. Como el autovalor 1 sólo tiene un autovector (salvo factor proporcional), deducimos que la matriz no es diagonalizable.

(h) Autovalores 1 (con multiplicidad 2) y -1. No es diagonalizable ya que el autovalor 1 sólo tiene un autoespacio de dimensión 1.

(i) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. No es diagonalizable en $\mathbb{R}$ ya que tiene autovalores complejos no reales, pero sí es diagonalizable en $\mathbb{C}$.

(j) Autovalores 1 (con multiplicidad 3) y -1. Como el autovalor 1 tiene autoespacio generado por dos autovectores linealmente independientes, deducimos que la matriz no es diagonalizable.

23) Para la primera matriz: $a = 3$ o $a = -1$. Autoespacios: $V_1 = \langle(-1,2)\rangle$, $V_5 = \langle(2,1)\rangle$.
Para la segunda matriz: $a = 1 \pm \sqrt{3}$. En el caso $a = 1 + \sqrt{3}$: $V_0 = \langle(1+\sqrt{3},1)\rangle$ y $V_1 = \langle(\frac{1}{-1+\sqrt{3}},1)\rangle$.
En el caso $a = 1 - \sqrt{3}$: $V_0 = \langle(1-\sqrt{3},1)\rangle$ y $V_1 = \langle(-\frac{1}{1+\sqrt{3}},1)\rangle$.