

Geometría de Riemann

(Guía Docente)

Profesor: Eduardo García Río

En la presente propuesta se ha optado por el máximo de actividad presencial pero haciendo hincapié en dedicar una parte importante de esa presencia a las tutorías, considerando que era recomendable desde el punto de vista pedagógico, dadas las características propias del aprendizaje matemático y la situación de novedad que supone el nuevo marco metodológico para profesores y alumnos.

ACTIVIDADES FORMATIVAS

Actividades formativas en el aula con presencia del profesor

A) *Clase de pizarra*: Lección impartida por el profesor que puede tener formatos diferentes (teoría, problemas y/o ejemplos generales, directrices generales de la materia...). El profesor puede contar con apoyo de medios audiovisuales e informáticos pero, en general, los estudiantes no los necesitan manejar en clase.

B) *Clases con ordenador/laboratorio*: Se incluyen aquí las clases en las que el alumno utiliza el ordenador en aula de informática (uso de paquetes para ilustración práctica de la teoría, prácticas de cálculo,...).

C) *Tutorías en grupos*: Tutorías programadas por el profesor. En general, supondrán para cada alumno entre 1 y 3 horas por cuatrimestre y asignatura.

Otras actividades formativas

La adquisición de competencias transversales (búsqueda y ordenación de información, escritura correcta de trabajos matemáticos, exposición oral de conocimientos en matemáticas, trabajo en equipo...) requiere la realización y entrenamiento en tareas específicas.

COMPETENCIAS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

Competencias Generales

(CG1) Adquisición de herramientas matemáticas de alto nivel para diversas aplicaciones cubriendo las expectativas de graduados en matemáticas y otras ciencias básicas.

(CG2) Conocer el amplio panorama de la matemática actual, tanto en sus líneas de investigación, como en metodologías, recursos y problemas que aborda en diversos ámbitos.

(CG3) Capacitar para el análisis, formulación y resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos, dentro de contextos más amplios.

(CG4) Preparar para la toma de decisiones a partir de consideraciones abstractas, para organizar y planificar y para resolver cuestiones complejas.

Competencias Específicas

(CE1) Capacitar para el estudio y la investigación en teorías matemáticas en desarrollo.

(CE2) Aplicar las herramientas de la matemática en diversos campos de la ciencia, la tecnología y las ciencias sociales.

(CE3) Desarrollar las habilidades necesarias para la transmisión de la matemática, oral y escrita, tanto en lo que respecta a la corrección formal, como en cuanto a la eficacia comunicativa, enfatizando el uso de las TIC apropiadas.

Competencias Transversales

(CT1) Utilizar bibliografía y herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos generales y específicos de Matemáticas, incluyendo el acceso por Internet.

(CT2) Gestionar de forma óptima el tiempo de trabajo y organizar los recursos disponibles, estableciendo prioridades, caminos alternativos e identificando errores lógicos en la toma de decisiones.

(CT3) Potenciar la capacidad para el trabajo en entornos cooperativos y pluridisciplinarios.

Materia: GEOMETRÍA DE RIEMANN
Código: 091552
Curso: Quinto.
Créditos: 6 (3 teóricos y 3 prácticos)

Titulación: Licenciatura en Matemáticas
Carácter: Optativa

Contenidos mínimos:

1. *Métricas Riemannianas.*
Preliminares. Tensor métrico. Existencia de métricas de Riemann. Ejemplos.
2. *Conexión de Riemann.*
Conexiones afines, transporte paralelo. La conexión de Levi Civita. Derivación de campos de tensores.
3. *Geodésicas.*
El flujo geodésico. Propiedades minimizantes de las geodésicas. Aplicación exponencial y entornos convexos.
4. *Variedades completas.*
Distancia asociada a la métrica de Riemann. Completitud geodésica. Teorema de Hopf-Rinow.
5. *Curvatura.*
Tensor curvatura. Funciones curvatura seccional, de Ricci y escalar. La ecuación de Jacobi. Puntos conjugados. Determinación local de la métrica a partir de la curvatura. Variedades de curvatura seccional constante.

Bibliografía recomendada:

- W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Pure Appl. Math., **120**. Academic Press, Florida, 1986.
- M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- Chavel, *Riemannian geometry, a modern introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, **108**. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- John M. Lee, *Riemannian geometry, an introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics, **176**. Springer-Verlag, New York, 1997.
- B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Pure Appl. Math., **103**. Academic Press, New York-London, 1983.

Competencias, destrezas y habilidades:

Utilizar el cálculo diferencial e integral, la topología y el conocimiento previo de los alumnos sobre variedades diferenciables para el desarrollo de la geometría Riemanniana como generalización de la teoría clásica de superficies en el espacio euclidiano 3-dimensional. Reconocer los aspectos locales y globales de la teoría y, en cada caso, la importancia de que la métrica sea definida positiva en contraposición a la geometría Lorentziana. Se desarrollará el concepto de conexión, derivada covariante y desplazamiento paralelo. Estos conceptos se utilizarán para el estudio de las geodésicas y sus propiedades minimizantes locales. Los alumnos han de ser capaces de determinar las geodésicas sobre superficies con un alto grado de simetrías. Se introducirá el tensor de curvatura y la función curvatura seccional. El estudio de la ecuación de Gauss para subvariedades permitirá identificar el *Teorema Egregium* de superficies en el contexto de la geometría Riemanniana y al mismo tiempo posibilitará a los alumnos la realización explícita del cálculo de la curvatura seccional de un buen número de superficies, en especial aquellas definidas por la imagen inversa de un valor regular. Los alumnos han de ser capaces de aplicar la teoría de ecuaciones diferenciales (en aspectos tales como la existencia y prolongación de soluciones) al estudio de problemas geométricos. Adquirirán soltura en el manejo de campos de tensores sobre variedades y en el análisis de operadores tales como el gradiente, Hessiano o Laplaciano.

El análisis de propiedades globales pondrá de manifiesto una de las diferencias esenciales entre la geometría Riemanniana y de Lorentz. El análisis de la función distancia permitirá interpretar toda variedad de Riemann como espacio métrico y relacionar la completitud de dicho espacio métrico con el carácter geodésicamente completo via el Teorema de Hopf-Rinow. Como consecuencia se obtendrá el carácter geodésicamente convexo de toda variedad Riemanniana completa. El alumno será capaz de contrastar estos resultados con la situación Lorentziana, mostrando la inviabilidad de los mismos en dicha

situación.

Los alumnos han de manejar con soltura diverso software y medios informáticos tanto para la visualización de curvas (principalmente geodésicas) sobre variedades como para el cálculo de distintos objetos tensoriales (como la curvatura), derivadas covariantes, derivadas de Lie, etc. sobre variedades tanto Riemannianas como Lorentzianas.

Indicación metodológica específica para la asignatura:

Las clases de pizarra consistirán básicamente en lecciones impartidas por el profesor, dedicadas a la exposición de los contenidos teóricos y a la resolución de problemas o ejercicios, siempre procurando la mayor implicación del alumno. Las clases con ordenador/laboratorio permitirán, en unos casos, la adquisición de habilidades prácticas y, en otros, servirán para la ilustración inmediata de los contenidos teóricos-prácticos, mediante la comprobación interactiva o la programación. Todas las tareas del alumno (estudio, trabajos, programas de ordenador, lecturas, exposiciones, ejercicios, prácticas...) serán orientadas por el profesor en las sesiones de tutoría. Con respecto a las tutorías, se atenderá a los estudiantes para discutir cuestiones concretas en relación con sus tareas o para tratar de resolver cualquier otra dificultad del alumno o grupo de alumnos relacionada con la asignatura.

El desarrollo de la asignatura contará con el apoyo del Aula Virtual de la USC a través del correspondiente curso al que podrán acceder los alumnos.

Criterio de evaluación específico para la asignatura:

La calificación de cada alumno se hará mediante evaluación continua y la realización de un examen final. La evaluación continua se hará por medio de controles escritos, trabajos entregados, participación del estudiante en el aula, tutorías u otros medios. La calificación del alumno no será inferior a la del examen final ni a la obtenida ponderándola con la evaluación continua, dándole a esta última un peso no inferior al 25% de la calificación final.

Actividades formativas con su contenido en horas del alumno:

TRABAJO PRESENCIAL EN EL AULA	Horas	TRABAJO PERSONAL DEL ALUMNO	Horas
Clases de pizarra en grupo grande	30	Estudio autónomo individual o en grupo	30
Clases de pizarra en grupo reducido		Escritura de ejercicios, conclusiones u otros trabajos	7
Clases con ordenador/laboratorio en grupo reducido	10	Programación/experimentación u otros trabajos en ordenador/laboratorio	5
Tutorías en grupo reducido sin ordenador/laboratorio	10	Lecturas recomendadas, actividades en biblioteca o similar	3
Tutorías en grupo reducido con ordenador/laboratorio	10	Preparación de presentaciones orales, debates o similar	
Tutorías en grupos muy reducidos o individualizadas		Asistencia a charlas, exposiciones u otras actividades recomendadas	
Otras sesiones con profesor Especificar:		Otras tareas propuestas por el profesor Especificar:	
Total horas trabajo presencial en el aula	60	Total horas trabajo personal del alumno	45

Requisitos previos recomendados:

Se aconseja un conocimiento previo de Geometría Diferencial. El conocimiento de la teoría de curvas y superficies en el espacio euclidiano así como unos conocimientos mínimos de la teoría básica de variedades diferenciables es de gran importancia. Además se recomienda haber cursado alguna asignatura de topología y de ecuaciones diferenciales ordinarias.