

GUÍA DOCENTE

Topoloxía
(Grupo A)
Curso 2008-09

Prof. José A. Oubiña Galiñanes
Departamento de Xeometría e Topología
Facultade de Matemáticas
Universidade de Santiago de Compostela

I. Datos descriptivos da materia

I.1. Descrición da materia:

Nome: Topoloxía

Código: 211

Trátase dunha materia obrigatoria, de 9 créditos (6 teóricos e 3 prácticos), que se imparte no primeiro cuatrimestre do segundo curso da Licenciatura en Matemáticas (Resolución de 1 de marzo de 2001, BOE de 16 de marzo).

I.2. Prerrequisitos:

O alumno debe ter coñecementos básicos de teoría de conxuntos, e da topoloxía da recta real e de \mathbf{R}^n , polo que debería ter cursado a materia troncal de primeiro curso ‘Topoloxía dos espazos euclidianos’.

I.3. Profesor que imparte a materia (do grupo A):

José Antonio Oubiña Galiñanes, catedrático de Xeometría e Topoloxía da Universidade de Santiago de Compostela.

A docencia será impartida en castelán. O material de apoio (boletíns, curso de Topoloxía no Campus Virtual da USC, <http://www.usc.es/campusvirtual/>, e o curso dentro da OpenCourseWare na USC,

http://ocw.usc.es/gl/servizos/ceta/opencourseware/Lic_Matem/mat_topoloxia/index.html) ofertarase en galego.

I.4. Horas de tutoría:

Mércores e xoves, de 5 a 8 a tarde no Departamento de Xeometría e Topoloxía (Facultade de Matemáticas).

II. Sentido da materia no perfil da titulación

II.1. Bloque formativo:

A materia Topoloxía pódese configurar dentro dun bloque xenérico de Xeometría Diferencial e Topoloxía, e é básica para o estudo das materias *Curvas e Superficies*, *Teoría Global de Superficies*, *Xeometría e Topoloxía* (onde se estudas as variedades diferenciables), *Topoloxía de Superficies*, *Homotopía*, *Topoloxía Alxébrica* e *Xeometría de Riemann*. Nesta materia introdúcese ademais ferramentas que se utilizan para o estudo dos diversos cursos de análise matemática.

II.2. Papel que xoga a materia no bloque formativo:

Os alumnos xa teñen coñecemento previo da topoloxía no caso particular do espazo \mathbf{R}^n , que estudaron na materia *Topoloxía dos espazos euclidianos* no segundo cuatrimestre do primeiro curso. Na presente materia de Topoloxía (xeral ou conxuntista) abstráense as propiedades máis importantes presentadas no curso anterior, para estudar, con un tratamento sistemático, espazos máis xerais que os euclidianos. O estudo do curso ten un valor formativo engadido,

que ven de que promove a aprendizaxe do tratamento rigoroso e formal da matemática. Por outra parte, o coñecemento dos espazos topolóxicos que aquí se introducen, é fundamental para o estudo doutros espazos que aparecen en matemáticas, como son as variedades diferenciáveis (obxectos básicos nos cursos de *Xeometría e Topoloxía*, *Xeometría de Riemann*, *Métodos xeométricos da Mecánica Clásica*) e os espazos de funcións (*Análise funcional*)

II.3. Interese da materia nas Matemáticas:

- a. A Topoloxía está non fundamentos da matemática e algúns dos conceptos que se estudan neste curso (continuidade, compacidade, conexidade) son nocións moi importantes e útiles en Matemáticas.
- b. Estúdanse conceptos moi básicos e intuitivos dos que se pode falar en niveis máis elementais de ensinanza (interior, fronteira, compoñentes) e apréndese a transformar a intuición das ideas no rigor propio das Matemáticas.
- c. No estudo da materia desenvólvense actividades que axudan na forma de traballar as matemáticas e as ciencias en xeral (intuición, capacidade de abstracción, visualización, resolución de problemas, razoamento coidadoso).
- d. Como consecuencia das construcións propias da Topoloxía, obtéñense curiosos e importantes exemplos de espazos na matemática e apréndese a comparalos e distinguilos ‘topolóxicamente’.
- e. A Topoloxía proporciona unha linguaxe necesaria para o manexo de diversos obxectos nas Matemáticas e na Física (variedades, espazos fibrados, grupos topolóxicos, grupos de Lie, nodos, cordas, ...)

II.4. Como aparece esta materia noutras universidades europeas.

Noutras universidades europeas aparecen cursos de topoloxía nos seus estudos de grado, usualmente como cursos de topoloxía xeral e algunhas veces como cursos de introdución á análise e a topoloxía ou de xeometría e topoloxía.

III. Obxectivos e competencias

1) Os obxectivos básicos do curso son:

- a. Introducir as nocións básicas de espazos topolóxicos, espazos métricos e continuidade.
- b. Construír novos espazos topolóxicos mediante produtos e cocientes.
- c. Coñecer as propiedades topolóxicas básicas; compacidade e conexidade

2) Ao final do curso os estudantes deben conseguir as seguintes ganancias:

- a. Comprender distintas formas de dar unha topoloxía nun conxunto: usando abertos, pechados, abertos básicos, veciñanzas básicas; e coñecer topoloxías definidas por distancias.
- b. Adquirir intuición no estudo dos espazos topolóxicos abstractos.
- c. Ser capaces de xeneralizar a espazos topolóxicos conceptos xa coñecidos polo alumno en espazos euclidianos: interior, adherencia, puntos de acumulación, a

noción de continuidade, as definicións e propiedades básicas de conexidade e compacidade; e coñecer novas propiedades xerais que tamén se aplican ao estudo de espazos métricos.

d. Saber construír novos espazos a partir doutros: subespazos, espazos suma, produto e cociente.

e. Afondar na noción de continuidade: homeomorfismos e propiedades topolóxicas, extensións continuas.

Como unha competencia transversal, a Topoloxía préstase ao aprendizaxe da escritura matemática formal, polo que o alumno debe progresar na capacidade de corrección formal na escritura das matemáticas.

IV. Contidos da materia

Descritores da materia no Plano de Estudos:

Espazos topolóxicos. Espazos métricos. Funcións continuas. Espazos suma, produto e cociente. Compacidade. Conexidade. Compleción e compacidade en espazos métricos. Espazos normais.

Organización do curso:

O curso organízase en 8 bloques ou temas, e cada un deles divídese en varios apartados:

1.- Espazos topolóxicos e espazos métricos: Topoloxías: espazos topolóxicos; abertos. Pechados. Bases. Veciñanzas. Bases locais. Métricas nun conxunto: espazos métricos. Metrizabilidade. Comparación de topoloxías. Métricas equivalentes. Interior, clausura e fronteira. Espazos de Hausdorff. Propiedades de numerabilidade. Sucesións converxentes. Sucesións de Cauchy en espazos métricos. Espazos métricos completos. Topoloxía relativa: subespazos.

2.- Continuidade: Aplicacións continuas. Aplicacións abertas e pechadas. Homeomorfismos e propiedades topolóxicas. Restricións. Aplicacións combinadas. Topoloxías inducidas. Aplicacións isométricas.

3.- Suma e produto de espazos topolóxicos: Topoloxía suma. Produto finito de espazos topolóxicos; a topoloxía produto. Propiedades. Produtos e continuidade.

4.- Espazos cocientes: Identificacións. A topoloxía cociente. Propiedades. Exemplos de espazos cocientes.

5.- Conexidade: Espazos topolóxicos conexos. Espazos conexos por camiños. Compoñentes conexas. Conexidade local.

6.- Compacidade: Espazos topolóxicos compactos. Compacidade e continuidade. Produto de espazos compactos. Compacidade local. Compactificación.

7.- Espazos normais: O problema de extensión dunha aplicación continua. Retraccións. Espazos normais. Lema de Urysohn. Teorema de extensión de Tietze.

8.- Compacidade e completión en espazos métricos: Compacidade secuencial. Propiedade de Bolzano-Weierstrass. Caracterizacións da compacidade en espazos métricos. Completamento dun espazo métrico. Teorema de completión. O espazo \mathbf{R} como completamento de \mathbf{Q} .

No seguinte gráfico indícase cada un dos temas, e mostrarase, na orientación de cada tema, a interrelación cos restantes sombreando aqueles que son necesarios para o seu desenvolvemento e os posteriores para os que o tema actual sexa imprescindible.



Bibliografía xeral:

Básica

Masa Vázquez, X.M., *Topoloxía Xeral*. Universidade de Santiago de Compostela. Santiago, 1999.

Munkres, J.R., *Topología*. Prentice--Hall. Madrid, 2002.

Complementaria

Ayala, R., E. Domínguez e A. Quintero, *Elementos de la Topología general*. Addison--Wesley. Madrid, 1997.

Copson, E.T., *Metric Spaces*. Cambridge University Press. Cambridge, 1968.

Dugundji, J., *Topology*. Allyn and Bacon. Boston, 1966.

Fleitas, G. e J. Margalef, *Problemas de Topología general*. Alhambra. Madrid, 1980.

García, M., J. Margalef, C. Olano, E. Outerelo e J.L. Pinilla, *Topología 1*. Alhambra. Madrid, 1975.

Hocking, J.G. e G.S. Young, *Topología*. Reverté. Barcelona, 1975.

Hu, S.T., *Elements of General Topology*. Holden--Day. San Francisco, 1969.

Kelley, J.L., *Topología general*. Eudeba. Buenos Aires, 1975.

Kosniowski, C., *Topología algebraica*. Reverté. Barcelona, 1989.

Lima, E.L., *Espaços métricos*. I.M.P.A. Rio de Janeiro, 1983.

Lipschutz, S., *Topología general*. McGraw--Hill. México, 1970.

Margalef, J., E. Outerelo e J.L. Pinilla, *Topología 2*. Alhambra. Madrid, 1975.

Sutherland, W.A., *Introduction to metric and topological spaces*. Clarendon Press. Oxford, 1975.

Willard, S., *General Topology*. Addison--Wesley. Reading, 1970

4. Método de traballo aconsellado.

O alumno debe ser consciente de que moitas das ideas que se expoñen son xeneralizacións de resultados que xa coñece nos espazos euclidianos. Para asimilar e asentir os diferentes conceptos que se introducen debe ser capaz de tratar como exemplos os seus coñecementos dos espazos euclidianos e comprender a existencia dos novos espazos que se presentan neste tema e que logo se usarán ao longo do curso en distintas situacións.

5. Actividades a desenvolver.

Realización en pequenos grupos dos exercicios propostos no primeiro boletín de problemas, intentar resolver os exercicios de autoavaliación propostos en cada apartado deste primeiro tema e no módulo de contidos Avaliación no curso de Topoloxía no Campus Virtual e face-lo exame virtual que se propoñerá antes de remata-lo tema.

6. Competencias traballadas.

O obxectivo 1a no referente a introdución das nocións básicas de espazos topolóxicos e espazos métricos, as competencias 2a e 2b, a competencia 2c no que se refire á xeneralización a espazos abstractos das nocións de interior, adherencia, puntos de acumulación, e a competencia 2d no que alude a construción de subespazos.

7. Dificultades principais no estudo do tema.

Unha dificultade de tipo xeral coa que se pode atopar o alumno e a capacidade de alcanzar o nivel de abstracción necesario para manexar os diferentes conceptos cos que se traballará no tema. Isto intentarase suplir con exemplos axeitados para cada noción. Algúns conceptos concretos como bases e bases locais merecen un tratamento coidadoso para evitar a típica confusión entre o que significa 'ser base dunha topoloxía dada' e o que quer dicir 'ser base dalgunha topoloxía'. Por outro lado, o significado da 'verificación dos axiomas de numerabilidade' nun espazo e a noción de 'separabilidade' traballarase con exemplos adecuados para unha boa asimilación.

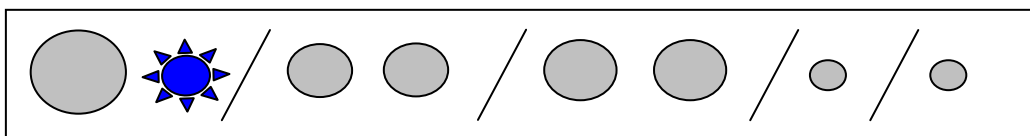
8. Bibliografía para ampliar o tema.

Para os diferentes conceptos introducidos nos espazos topolóxico o libro de Willard é unha boa referencia complementaria, e para unha ampliación do estudo dos apartados sobre os espazos métricos poden verse os textos de Lima e de Sutherland.

Ademais, como complemento a este primeiro tema poden verse distintas respostas á pregunta 'Que é a topoloxía?' e unha breve historia da Topoloxía no curso da materia no Campus Virtual ou ben na páxina do OpenCourseWare

http://ocw.usc.es/gl/servizos/ceta/opencourseware/Lic_Matem/mat_topoloxia/material/index.html

TEMA 2: Continuidade.



1. Sentido do tema.

Neste tema introdúcese as noción máis básicas sobre a continuidade en espazos topolóxicos. Na súa concepción máis primitiva, a continuidade aplícase independentemente a dúas situacións: a continuidade da materia dun obxecto e a continuidade do tempo; nun estado máis avanzado de abstracción, estas dúas concepcións fusiónanse na de continuidade do movemento dunha partícula ao longo dunha traxectoria. A continuidade do movemento tradúcese en que ao variar o tempo t , os valores de recorrido $f(t)$ que se lle asignan desprázanse dun xeito continuo. Estas observacións físicas dan unha idea bastante natural de cando unha función non é continua: se para algún instante do seu dominio prodúcese unha rotura no seu recorrido. Isto fai pensar que o concepto de continuidade debe descansar no de proximidade, e dado que no tema anterior temos definido este concepto (veciñanzas, abertos) estamos en condicións de dar unha definición rigorosa de continuidade.

2. Apartados do tema.

Aplicacións continuas. Aplicacións abertas e pechadas. Homeomorfismos e propiedades topolóxicas. Restricións. Aplicacións combinadas. Topoloxías inducidas. Aplicacións isométricas.

3. Materiais para estudar o tema.

Este segundo tema pódese estudar seguindo os textos de Masa (Capítulo 9), Munkres (Cap. 2, Sección 18) e o libro de Hu (Cap. II, Sec. 3), así como o material específico deste segundo tema no OpenCourseWare na USC:

http://ocw.usc.es/gl/servizos/ceta/opencourseware/Lic_Matem/mat_topoloxia/material/temas/tema2.html

4. Método de traballo aconsellado.

Para asimilar este tema o alumno debe comprender como abstraer a noción de continuidade que xa coñece na recta real e nos espazos euclidianos para pasala a espazos topolóxicos xerais. É dicir, debe ter presente que debe prescindir das distancias para utilizar as veciñanzas e as veciñanzas básicas, que aparecerán en lugar dos intervalos e das bólas euclidianas.

5. Actividades a desenvolver.

Efectuar os exercicios propostos no primeiro boletín de problemas, resolver os exercicios de autoavaliación propostos en cada apartado do Tema 2 e no módulo de contidos Avaliación no curso de Topoloxía no Campus Virtual e face-lo exame virtual que se propoñerá ao remata-lo tema sobre os Temas 1 e 2.

6. Competencias traballadas.

O obxectivo 1a no referente a continuidade, as competencias 2b e 2e.

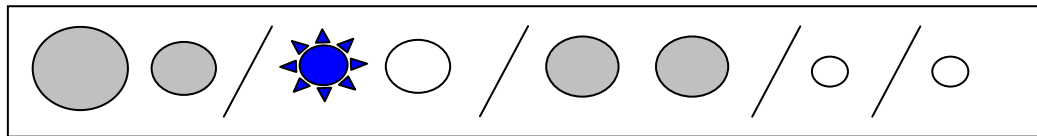
7. Dificultades principais no estudo do tema.

Unha das principais dificultades pode ser comprender que a noción de continuidade en espazos abstractos posúe diferentes significados segundo a topoloxía coa que se traballe e non se corresponde coa idea intuitiva euclidiana. Os diferentes exemplos pretenderán aclarar este significado.

8. Bibliografía para ampliar o tema.

No libro de Dugundji pódense atopar propiedades xerais sobre continuidade que poden ser ilustrativos para ampliar algúns dos conceptos que se estudan neste tema.

TEMA 3: Suma e produto de espazos topolóxicos.



1. Sentido do tema.

A partir de varios espazos topolóxicos pódense obter novos espazos: Na súa unión defínese unha topoloxía inducida por cada un dos espazos que se chama a "topoloxía suma ". No seu produto, obtense a chamada "topoloxía produto ", que se caracteriza pola topoloxía que ten cada un dos seus factores, da mesma forma que a topoloxía dos espazos euclidianos de varias dimensións ven determinada pola topoloxía euclidiana das súas rectas coordenadas. Neste tema constrúense novos espazos como suma ou produto de familias de espazos topolóxicos.

2. Apartados do tema.

Topoloxía suma. Produto finito de espazos topolóxicos; a topoloxía produto. Propiedades. Produtos e continuidade .

3. Materiais para estudar o tema.

O terceiro tema pódese estudar seguindo o libro de Masa (Capítulos 10.2 e 10.3), e o libro de Hu (Cap. II, principio da Sección 5 no que se refire a topoloxía suma), así como o material específico deste terceiro tema no OpenCourseWare na USC:

http://ocw.usc.es/gl/servizos/ceta/opencourseware/Lic_Matem/mat_topoloxia/material/temas/tema3.html

4. Método de traballo aconsellado.

É importante ter claro o comportamento do produto finito de conxuntos, das proxeccións e das aplicacións que involucran produtos. Para pensar na topoloxía produto debe pensarse outra vez no caso euclidiano e comprender como as unións de bólas abertas euclidianas e as unións de produtos de intervalos son a mesma cousa.

5. Actividades a desenvolver.

Realizar os exercicios propostos no terceiro boletín de problemas, intentar resolver os exercicios de autoavaliación propostos en cada apartado do Tema 3 e no módulo de contidos Avaliación no curso de Topoloxía no Campus Virtual e face-lo exame virtual sobre os Temas 1, 2 e 3 que se propoñerá ao acabar este tema.

6. Competencias traballadas.

O obxectivo 1b no que alude á construción de novos espazos mediante produtos, a competencia 2b, e a competencia 2d no que se refire a saber construír espazos suma e produto a partir doutros espazos.

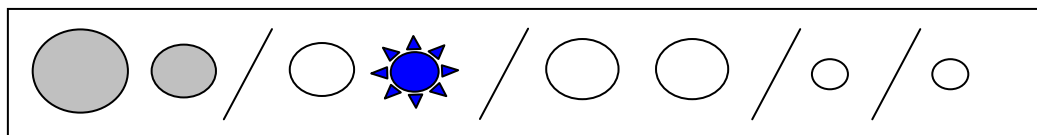
7. Dificultades principais no estudo do tema.

A principal dificultade consiste en comprender claramente como os abertos da topoloxía produto non son soamente os produtos de abertos dos factores senón que hai moitos máis. O confundir a base que se usa para introducir a topoloxía produto con toda a topoloxía é o erro máis común na aprendizaxe deste tema.

8. Bibliografía para ampliar o tema.

O libro de Munkres e o de Willard son aconsellables para un estudo máis xeral da topoloxía produto.

TEMA 4: Espazos cocientes.



1. Sentido do tema.

Algúns obxectos moi simples, como un cubo, un tetraedro ou un cilindro, pódense obter pegando partes dun cacho de papel seguindo certas regras. Isto é un exemplo de construción dun obxecto cociente. En xeral, os cocientes dun conxunto determínanse por unha relación de equivalencia ou a través dunha

partición. Se o conxunto de partida ten unha topoloxía, a partición da lugar a unha topoloxía no cociente e á obtención dun "espazo cociente". Neste tema utilizaranse as nocións de partición ou descomposición, relación de equivalencia, conxunto cociente, etc., para construír os espazos cocientes.

2. Apartados do tema.

Identificacións. A topoloxía cociente. Propiedades. Exemplos de espazos cocientes.

3. Materiais para estudar o tema.

O libro de Hu (Capítulo II, Sección 6) e o de Masa (Capítulo 19.4) son adecuados para o estudo deste tema. Pódese usar tamén o material específico deste cuarto tema no OpenCourseWare na USC:

http://ocw.usc.es/gl/servizos/ceta/opencourseware/Lic_Matem/mat_topoloxia/material/temas/tema4.html

4. Método de traballo aconsellado.

En primeiro lugar debe coñecerse con claridade a noción conxuntista de cociente dada ou ben por unha partición ou ben por unha relación de equivalencia. É despois importante comprender como se introduce a topoloxía no conxunto cociente e ver moitos exemplos da construcións de espazos cocientes e de saber identificar espazos coñecidos con cocientes doutros espazos.

5. Actividades a desenvolver.

Traballar os exercicios propostos no cuarto boletín de problemas, resolver os exercicios de autoavaliación propostos en cada apartado do Tema 4 e no módulo de contidos Avaliación no curso de Topoloxía no Campus Virtual e face-lo exame virtual que se propoñerá ao rematar este tema e que comprenderá cuestións sobre os catro primeiros temas.

6. Competencias traballadas.

O obxectivo 1b no referente a construción de espazos cocientes, a competencia 2b, e a competencia 2d no que alude a construción de espazos cocientes.

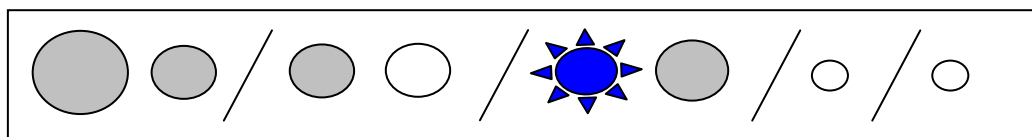
7. Dificultades principais no estudo do tema.

A principal dificultade é saber visualizar, a partir dunha relación de equivalencia, ou dunha certa descomposición dun espazo, como é o novo espazo cociente que se obtén e coñecer a súa topoloxía.

8. Bibliografía para ampliar o tema.

Os libros de Dugundji e Willard son boas referencias complementarias. Ademais, no libro de Kosniowski pódense atopar interesantes construcións con espazos cocientes.

TEMA 5: Conexidade.



1. Sentido do tema.

Hai dúas ideas intuitivas de conexidade: unha delas aplícase aos espazos que non se poden separar en porcións disxuntas; a outra refírese aos espazos nos que é posible moverse dun punto a outro dun xeito continuo, sen saltos. Dan lugar a dúas nocións, a de "espazo conexo" e a de "espazo conexo por camiños", que están intimamente ligadas, aínda que non son equivalentes. Neste tema introdúcense estas dúas nocións e tamén se estuda a relación entre elas.

2. Apartados do tema.

Espazos topolóxicos conexas. Espazos conexas por camiños. Compoñentes conexas. Conexidade local.

3. Materiais para estudar o tema.

Para o estudo deste tema é adecuado o Capítulo 12 do libro de Masa, o Capítulo 3 (Seccións 23 e 25) de Munkres e o material específico deste quinto tema no OpenCourseWare na USC:

http://ocw.usc.es/gl/servizos/ceta/opencourseware/Lic_Matem/mat_topoloxia/material/temas/tema5.html

4. Método de traballo aconsellado.

Tanto a noción de conexidade como de conexidade por camiños son moi intuitivas e é fácil visualizar estas propiedades. O que queda é un lóxico traballo de formalización e comprensión de diferentes exemplos.

5. Actividades a desenvolver.

Realización de exercicios sobre conexidade traballando os espazos que se presentaron nos temas anteriores, intentar resolver os exercicios de autoavaliación propostos en cada apartado do Tema 5 e no módulo de contidos Avaliación no curso de Topoloxía no Campus Virtual.

6. Competencias traballadas.

O obxectivo 1c e a competencia 2c no referente ao coñecemento e propiedades básicas da conexidade, e a competencias 2b.

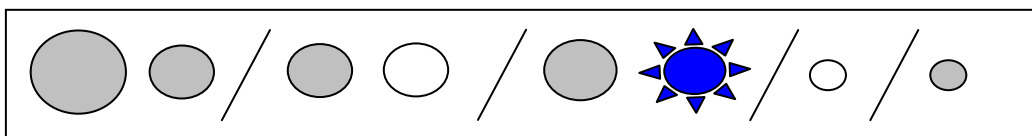
7. Dificultades principais no estudo do tema.

A construción de camiños explícitos en espazos concretos debe traballarse para vencer a inicial posible dificultade técnica da súa obtención.

8. Bibliografía para ampliar o tema.

Unha adecuada bibliografía complementaria para o estudo da conexidade son os libros de Ayala-Domínguez-Quintero e Willard.

TEMA 6: Compacidade.



1. Sentido do tema.

Neste tema trátase a noción de compacidade, que é fundamental en topoloxía. Permite xeneralizar a espazos abstractos o comportamento e algunhas propiedades comúns de conxuntos tales como os intervalos pechados da recta real, os rectángulos pechados do plano ou as esferas e das funcións continuas definidas neles. Hai certos comportamentos locais que as características destes espazos permiten transformar en globais, e todos eles exténdense como consecuencia de que os recubrimentos abertos admiten subrecubrimentos finitos. Isto leva a definición de "espazo compacto".

2. Apartados do tema.

Espazos topolóxicos compactos. Compacidade e continuidade. Produto de espazos compactos. Compacidade local. Compactificación.

3. Materiais para estudar o tema.

O texto de Masa (Capítulo 11) e o de Munkres (Capítulo 3, Seccións 26 e 29) e o material específico deste sexto tema no OpenCourseWare na USC:
http://ocw.usc.es/gl/servizos/ceta/opencourseware/Lic_Matem/mat_topoloxia/material/temas/tema6.html

4. Método de traballo aconsellado.

É importante ver como o paso de certas propiedades locais a propiedades globais (como que unha función pase de ser localmente acotada nun intervalo pechado a acotada) ou que unha función continua nun intervalo pechado pase a ser uniformemente continua, depende fortemente de certa propiedade que se pode definir a partir de recubrimentos usando unha definición que pode parecer en principio pouco intuitiva. A cuestión é comprender, con profusión de exemplos, en que consiste esta xeneralización dos intervalos pechados da recta real ou dos rectángulos pechado e bólas euclidianas pechadas do plano.

5. Actividades a desenvolver.

Estudar a compacidade dos espazos topolóxicos que xa apareceron en temas anteriores, resolver os exercicios de autoavaliación propostos en cada apartado do Tema 6 e no módulos de contidos Avaliación no curso de Topoloxía no Campus Virtual e face-lo último exame virtual que se propoñerá e que abarca os seis primeiros temas.

6. Competencias traballadas.

O obxectivo 1c e competencia 2c no referente ao coñecemento e propiedades básicas da compacidade, e a competencias 2b.

7. Dificultades principais no estudo do tema.

A principal dificultade é asimilar perfectamente a noción de compacidade: distinguir entre que un espazo teña recubrimentos finitos (sempre os ten) de que de cada recubrimento se poida extraer unha familia finita que tamén recubra o espazo. O traballo con moitos exemplos e a aplicación a cuestións teóricas debe solucionar esta dificultade.

8. Bibliografía para ampliar o tema.

Os libros de Hu e Willard son unha bibliografía complementaria adecuada para este tema de compacidade.

TEMA 7: Espazos normais.



1. Sentido do tema.

Verase aquí unha introdución ao problema da extensión de aplicacións continuas definidas en subespazos de espazos topolóxicos. Para espazos topolóxicos (os chamados “espazos normais”) que verifican convenientes propiedades de separación, o problema de extensión ten unha resposta afirmativa no caso de aplicacións definidas en subespazos pechados e con valores en certos subespazos da recta real.

2. Apartados do tema.

O problema de extensión dunha aplicación continua. Retraccións. Espazos normais. Lema de Urysohn. Teorema de extensión de Tietze.

2. Materiais para estudar o tema.

Son adecuados os libros de Masa (Capítulo 15) e Munkres (Capítulo 4, Seccións 32, 33 e 35), e o material específico deste sétimo tema no OpenCourseWare na USC:

http://ocw.usc.es/gl/servizos/ceta/opencourseware/Lic_Matem/mat_topoloxia/material/temas/tema7.html

4. Método de traballo aconsellado.

Enfócase este tema pretendendo construír funcións sobre espazos topolóxicos con certas propiedades de extensións e tratando as dificultades que este proceso ten en xeral. Insistirase na proba de dous teoremas non triviais: o lema de Urysohn e o teorema de extensión de Tietze e o seu significado e aplicacións.

5. Actividades a desenvolver.

Estudar o carácter normal dos espazos topolóxicos que xa apareceron en temas anteriores, e resolver os exercicios de autoavaliación propostos en cada apartado do Tema 7 e no módulos de contidos Avaliación no curso de Topoloxía no Campus Virtual.

6. Competencias traballadas.

A competencia b e a competencia e no referente ás extensións continuas.

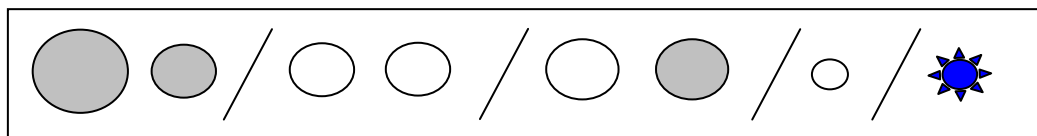
7. Dificultades principais no estudo do tema.

As principais dificultades están na proba dos dous resultados do tema (lema de Urysohn e teorema de extensión de Tietze), que son sen dúbida as demostracións máis complicadas de resultados que aparecen no curso. Deberase esquematizar cada unha das demostracións e estruturar en pasos máis curtos que permitan un seguimento axeitado dos razoamentos.

8. Bibliografía para ampliar o tema.

Nos libros de Willard, Hu e Hocking-Young pódese ampliar o estudo do problema de extensión e dos espazos normais.

TEMA 8: Compacidade e completión en espazos métricos.



1. Sentido do tema.

Estúdase neste tema a equivalencia no caso dos espazos métricos da noción xeral de compacidade e das diversas nocións que a precederon historicamente, como a continuidade secuencial e a propiedade de Bolzano-Weierstrass. Ademais, coa mesma idea da compactificación de espazos topolóxicos non compactos, analízase o problema de encaixar isométricamente un espazo métrico nun espazo completo e, co modelo de Cantor da construción de \mathbf{R} a partir de clases de equivalencia de sucesións de Cauchy de números racionais, constrúese o completamento dun espazo métrico arbitrario.

2. Apartados do tema.

Compacidade secuencial. Propiedade de Bolzano-Weierstrass. Caracterizacións da compacidade en espazos métricos. Completamento dun espazo métrico. Teorema de completión. O espazo \mathbf{R} como completamento de \mathbf{Q} .

3. Materiais para estudar o tema.

O libro de Munkres (Capítulo 3, Sección 28) para as caracterizacións de compacidade e o Capítulo 11 (Apéndice) do libro de Sutherland para o estudo do completamento e teorema de completión, e o material específico deste último tema no OpenCourseWare na USC:

http://ocw.usc.es/gl/servizos/ceta/opencourseware/Lic_Matem/mat_topoloxia/material/temas/tema8.html

4. Método de traballo aconsellado.

É aquí importante ter presentes os coñecementos de compacidade secuencial e por punto límite no caso euclidiano para a súa xeneralización aos espazos métricos, así como o paso do conxunto \mathbf{Q} dos números racionais á construción de \mathbf{R} ; isto suxire o completamento en xeral de espazos métricos non completos.

5. Actividades a desenvolver.

Aquí a principal actividade consistirá en comparar as probas xerais en espazos métricos coas xa coñecidas no caso euclidiano e na recta real.

6. Competencias traballadas.

O obxectivo b e a competencia c en relación coa compacidade en espazos métricos.

7. Dificultades principais no estudo do tema.

Neste tema non deberían aparecer excesivas dificultades, aínda que a proba de que todo espazo secuencialmente compacto é compacto require unha descomposición en pequenos pasos para facilitala demostración.

8. Bibliografía para ampliar o tema.

Os libros de Lima e Masa poden servir como referencias complementarias para o estudo deste último tema.

V. Indicacións metodolóxicas e distribución ECTS

No curso de Topoloxía introdúcense unha serie de conceptos básicos para estudar en espazos abstractos propiedades xa vistas polos estudantes en casos particulares, e outras nova propiedades que permiten coñecer novos tipos de espazos. É fundamental presentar exemplos ilustrativos de tódolos conceptos introducidos e que os alumnos coñezan e distinguan aqueles exemplos básicos que o profesor indicará e que aparecerán con frecuencia ao longo do curso. Proponeranse ademais diversos problemas que permitan traballar os distintos temas que se estudan. Ademais hai un curso virtual na WebCT da USC denominado 'Topoloxía', no que está dispoñible un guión detallado e exercicios propostos para cada un dos apartados de cada tema, e outros recursos (comentarios, historia, glosario, exercicios de autoavaliación, exames virtuais). Como complemento do traballo diario, e co fin de asentir os coñecementos adquiridos, os alumnos deberían realizar os exercicios de autoavaliación propostos no curso virtual para cada apartado de cada tema e os máis xerais para cada tema no módulo de contidos específico.

Por outra banda, promoverase a participación dos estudantes, pretendendo que intenten ou suxiran:

- establecer en espazos abstractos aqueles conceptos que xa estudaron nos espazos euclidianos;
- dar exemplos e contraexemplos das novas definicións, unha vez se lles teñan presentados os casos particulares máis suxerentes;
- criticar as necesidades ou carencias de certos conceptos, en relación cos casos especiais que os alumnos xa coñecen ou que vaian xurdindo.

Os métodos de traballo utilizados favorecen o traballo en equipo e levan consigo a realización de varias exposicións orais breves por parte de cada estudante.

A esta materia, que ten asignados 9 créditos, correspóndelle unha carga de traballo de 225 créditos, que se poden distribuír acorde ao seguinte esquema:

Actividades	Horas presenciais	Factor	Traballo persoal	Total
Clases en grupo grande	72	1,5	108	180
Seminarios en grupo reducido	15	1,5	22,5	37,5
Titorías en grupo moi reducido	3	1,5	4,5	7,5
Total	90		135	225

VI. Indicacións sobre a avaliación

Haberá un exame final escrito, onde o alumno debe desenvolver preguntas teóricas, responder cuestións teóricas e prácticas e resolver os problemas que se propoñan. Ademais, o alumno realizará unha serie de actividades que tamén se utilizarán para avaliálo, e co que poderá conseguir ata un 30% da cualificación final. Estas actividades consisten en:

- asistencia e participación en seminarios e titorías (10%)
- realización de exames no curso virtual (10%)
- resolución dun exercicio escrito presencial ao acabar a primeira metade do curso (ao fin do tema 4), onde se deberán analizar certas propiedades básicas dun espazo topolóxico concreto (10%)

Neste total de actividades (TA) o alumno poderá obter ata 3 puntos. No exame final escrito poderá obter ata 10 puntos, e a cualificación final establécese coa seguinte fórmula:

$$\text{Cualificación final} = 0'7 \text{ EF} + \text{máx}\{\text{TA}, 0'3 \text{ EF}\}$$