DEPARTAMENTO DE XEOMETRÍA E TOPOLOXÍA
FACULTADE DE MATEMÁTICAS
Universidade de Santiago de Compostela

Topoloxía dos espazos euclidianos
27 de xuño de 2008

RESPOSTAS

1. Proba que un conxunto é aberto sse é unión de bólas abertas.

(1,5 puntos)

2. Considera o espazo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$. Sexa E o subconxunto

$$E = \{(x, y) \in X \mid y > x^2\}.$$

Estuda o carácter aberto de E en X e en $\mathbb{R}^2$.

(1,5 puntos)

3. Sexa $\{x_n\}$ unha sucesión en $\mathbb{R}^p$, $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ o conxunto de puntos da mesma. Demostra que se A é limitado a sucesión $\{x_n\}$ ten unha subsucesión converxente.

(1,75 puntos)

4. Considera a función combinada $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y) & \text{se} \quad \|(x, y)\| \leq 1 \\[2ex] \dfrac{(x, y)}{\|(x, y)\|} & \text{se} \quad \|(x, y)\| > 1 \end{cases}$$

a) Calcula $\|f(x, y)\|$.

b) Estuda a continuidade de f.

(2 puntos)

5. Sexa $T_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/n, 0 \leq y \leq 1/n\}$. Sexa $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Estuda o carácter compacto e conexo de X.

(1,5 puntos)

6. Proba que un conxunto é conexo sse cada dous puntos del pertencen a un subconxunto conexo.

(1,75 puntos)

Aviso: A revisión de exames será o mércores, 2, de 11 a 12, e o xoves, 3, de 10 a 11.

VOLVER AOS ENUNCIADOS

2. O conxunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$ é aberto en $\mathbb{R}^2$. Unha forma de comprobalo é considerar a función continua $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y - x^2$. Agora $V = f^{-1}((0, +\infty))$, imaxe recíproca dun aberto.

   Como $E = V \cap X$, E é un conxunto aberto en X. Non é aberto en $\mathbb{R}^2$. En efecto, o punto $(0, 1)$ pertence ao conxunto e non verifica a condición de definición de aberto, non é un punto interior: calquera bóla $B_2((0, 1), r)$ de centro o punto, contén puntos que non pertence en ao conxunto, por exemplo, o punto $(0, 1 + r/2)$.

4. (a) Supoñamos $\|(x, y)\| \leq 1$.

   $$\|\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(x - y)^2 + (x + y)^2} = \|(x, y)\|\,.$$

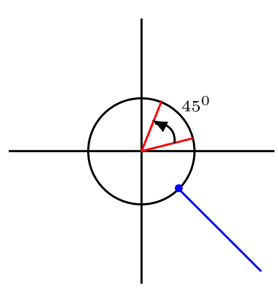
   Supoñamos $\|(x, y)\| > 1$.

   $$\|\frac{(x, y)}{\|(x, y)\|}\| = \frac{\|(x, y)\|}{\|(x, y)\|} = 1\,.$$

   (b) As restriccións da función aos conxuntos abertos

   $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < 1\} \quad \text{e} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| > 1\}$$

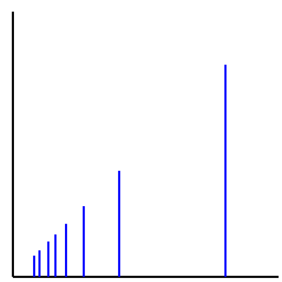
   son continuas, logo a función é continua nos puntos destes conxuntos. Resta por estudar a continuidade nos puntos da circunferencia unitaria.



Dentro do círculo unitario a función é unha rotación de 45^0. Fóra, leva os puntos de cada semi-recta pola orixe ao correspondente punto da circunferencia unitaria.

Sexa (x_0, y_0) un punto da circunferencia. A sucesión $\{\frac{1+n}{n}(x_0, y_0)\}$ converxe a (x_0, y_0), pero a sucesión imaxe é constantemente igual a (x_0, y_0), distinto de $f(x_0, y_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0 - y_0, x_0 + y_0)$. Logo a función non é continua en ningún punto da circunferencia unitaria.

5. O conxunto non é pechado. O punto $(0, 0)$ é de acumulación, e non pertence ao conxunto. É o límite da sucesión de puntos do conxunto $\{(1/n, 0)\}$. Xa que logo, non é compacto.



Tampouco é conexo. Unha separación non trivial vén dada polos conxuntos

$$U = \{(x, y) \in X \mid x < 2/3\}, \quad V = \{(x, y) \in X \mid x > 2/3\}.$$