

1. Sexa $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Considera o conxunto

$$X = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Calcula o seu conxunto derivado X' .

(b) Define o concepto de sucesión de Cauchy. Define o concepto de converxencia de sucesións.

(c) Sexa $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ a sucesión dada por $\varphi(n) = x_n$. ¿É de Cauchy? ¿É converxente?

(d) Define o concepto de subsucesión.

(e) Para cada $z \in X'$ constrúe unha subsucesión de $\varphi = \{x_n\}$ converxendo a z .

(2,25 puntos)

2. Estudia a continuidade da función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } \|(x, y)\| < 1, \\ (x, 0) & \text{se } \|(x, y)\| \geq 1. \end{cases}$$

(2,25 puntos)

3. Sexan $X \subset \mathbb{R}^p$, $Y \subset \mathbb{R}^q$ dous espazos, $f: X \rightarrow Y$ unha aplicación. Demostra a equivalencia das tres condicións seguintes:

(a) A aplicación f é continua.

(b) A imaxe recíproca de todo subconxunto aberto V de Y é un conxunto aberto en X .

(c) A imaxe recíproca de toda bola aberta $B_Y(y, r)$ de Y é un conxunto aberto en X .

(2 puntos)

4. Define o concepto de compacidade. Demostra que todo conxunto compacto é pechado.

(1,5 puntos)

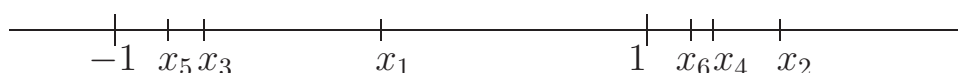
5. Considerade os seguintes subconxuntos A e B de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0, y \leq x\}, \quad B = A \cap (B_2[(0, 0), 1] - \{(0, 0)\}).$$

Estuda o carácter compacto e conexo de A e B .

(2 puntos)

1. (a) Os elementos x_n de índice impar achéganse indefinidamente a -1 . Analogamente, os elementos x_n de índice par achéganse indefinidamente a 1 . Os puntos 1 e -1 van ser puntos de acumulación do conxunto X . Un argumento máis formal darase no apartado e).



Non hai outros puntos de acumulación. Para un punto x a esquerda do -1 , $x < -1$, o intervalo aberto $(2x + 1, -1)$, de centro x , non contén ningún punto do conxunto. Non é, pois, de acumulación. Tampouco é de acumulación un punto $x \in (-1/2, 1)$, pois este intervalo aberto só ten un punto do conxunto (o punto $x_1 = 0$). Non é de acumulación un punto $x > 1 + 1/4$, pois o conxunto aberto $(1 + 1/4, \infty)$ soamente contén un punto do conxunto (o punto $x_2 = 1 + 1/2$). Se x pertence ao intervalo (x_{2n+1}, x_{2m+1}) , con $n > m$, tampouco, pois este conxunto aberto soamente contén un número finito de puntos de X (os puntos x_{2k+1} con $m < k < n$). Mesmo argumento se $x \in (x_{2n}, x_{2m})$ con $n > m$.

Así tense $X' = \{-1, 1\}$.

- (c) A sucesión non é de Cauchy, pois o conxunto X ten máis dun punto de acumulación.

Se se prefer un argumento directo: dado $\varepsilon = 2$, non existe ningún n_0 tal que se $n, m \geq n_0$, $|x_n - x_m| < 2$, pois para todo n verifícase

$$x_{2n} - x_{2n+1} = 2 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} > 2.$$

Non sendo de Cauchy, non é converxente.

- (e) A función $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que a k fai corresponder $2k$ define unha subsucesión $\{y_k\}$ de $\{x_n\}$, dada por $y_k = x_{2k}$. Converxe a 1 .

A función $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que a k fai corresponder $2k + 1$ define unha subsucesión $\{z_k\}$ de $\{x_n\}$, dada por $z_k = x_{2k+1}$. Converxe a -1 .

2. Sexan

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < 1\},$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| > 1\}.$$

Son subconxuntos abertos de $\mathbb{R}^2$: a función $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que a (x, y) fai corresponder a súa norma $\|(x, y)\|$ é continua, e $U = h^{-1}((-\infty, 1))$, $V = h^{-1}((1, +\infty))$.

$f|_U$ é a inclusión de U en $\mathbb{R}^2$, logo, continua. Por ser U aberto, f é continua nos puntos de U .

$f|_V$ é continua: a composición coa primeira proxección é igual á primeira proxección; a composición coa segunda proxección é constante. Por ser V aberto, f é continua nos puntos de V .

Estudemos a continuidade de f nun punto (x, y) verificando $\|(x, y)\| = 1$. Consideremos a sucesión $\left\{ \frac{n-1}{n} \cdot (x, y) \right\}$ de puntos de U , que converge a (x, y) . A sucesión imaxe é ela mesma. A imaxe de (x, y) é $(x, 0)$. Xa que logo, se $y \neq 0$, a función non é secuencialmente continua no punto unitario (x, y) .

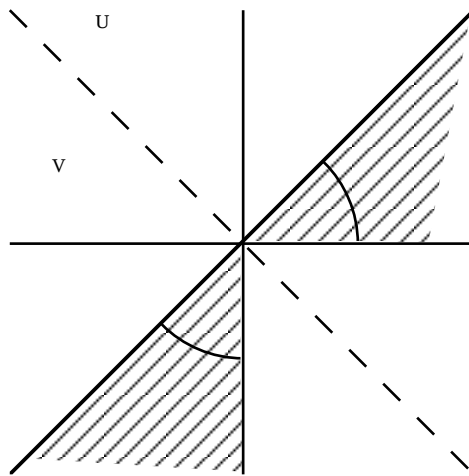
Resta por considerar a continuidade nos puntos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Pero resulta obvio que, na definición de continuidade, nestes puntos, dado ε abonda tomar $\delta = \varepsilon$.

5. O conxunto A é unión de dous subconxuntos,

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, y \leq x\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0, y \geq x\}.$$

Cada un deles é convexo: se $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in A_i$, é doado comprobar que os puntos da forma $(1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1)$, $0 \leq t \leq 1$, pertencen a A_i , $i = 1, 2$. Logo A_1 e A_2 son conexos. Ademais teñen en común o punto $(0, 0)$. Logo A é conexo.



O conxunto A non é limitado, logo non é compacto.

O conxunto B non é pechado: o punto $(0, 0)$ é de acumulación. Logo, non é compacto. Tampouco é conexo. Os conxuntos

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -y\}, \quad V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -y\},$$

definen unha separación.