
Prof. Xosé M. Masa Vázquez

1. (a) Enuncia o Teorema de Bolzano-Weierstrass relativo á existencia de puntos de acumulación en subconxuntos de $\mathbb{R}^p$, coa distancia euclidiana.
- (b) Sexa $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/n, y = 1 + 1/m, m = 1, 2, \dots, n-1\}$. Utilizando o Teorema de Bolzano-Weierstrass, deduce se o subconxunto

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

de $\mathbb{R}^2$ ten algún punto de acumulación.

- (c) En caso de resposta afirmativa, indica un e constrúe unha sucesión de puntos de D converxendo a el.
-

2. Recorda a definición da norma $\| \cdot \|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$,

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

Considera a función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (-y, -x) & \text{se } \|(x, y)\|_\infty \leq 1, \\ \frac{\sqrt{2}}{\|(x, y)\|_2} \cdot (x, y) & \text{se } \|(x, y)\|_\infty > 1. \end{cases}$$

- (a) Debuxa a imaxe das rectas $y = x$ e $x = 0$, e da circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.
- (b) Estudia a continuidade da función, considerando no dominio e no rango a métrica euclidiana.
-

3. Sexa (M, d) un espazo métrico.

- (a) Demostra que todo subconxunto compacto de M é pechado.
- (b) Sexan K e L dous subconxuntos compactos de M . ¿É $K \cap L$ compacto?
-

Esta é unha cuestión teórica que se podería referir a calquera espazo X , na terminoloxía usada no curso

4. Considérase $\mathbb{R}^2$ coa topoloxía usual asociada á métrica euclidiana.

- (a) Demostra que $\mathbb{S}^1$, a circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$, é conexas.
- (b) Demostra que dúas circunferencias calquera en $\mathbb{R}^2$ son homeomorfas.
- (c) Sexa $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2\}$. Estudia a conexidade do subconxunto

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

de $\mathbb{R}^2$.

Nesta folla indícanse respostas ás cuestións propostas no exame. Naturalmente, hai outras respostas igualmente correctas. Procurouse, aquí, ofrecer as máis sinxelas e sistemáticas.

1.

$$\begin{aligned} D_1 &= \emptyset, \\ D_2 &= \{(1/2, 2)\}, \\ D_3 &= \{(1/3, 2), (1/3, 3/2)\}, \\ D_4 &= \{(1/4, 2), (1/4, 3/2), (1/4, 4/3)\}, \\ &\vdots \\ D_n &= \{(1/n, 2), (1/n, 3/2), (1/n, 4/3), \dots, (1/n, n/n - 1)\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hai infinidade de conxuntos D_n , todos disxuntos, soamente un baleiro, o conxunto D é, xa que logo, infinito. Tamén é limitado: ningún elemento do conxunto ten norma maior que a do punto $(1/2, 2)$, pois calquera outro punto ten coordenadas iguais ou menores. Logo, polo Teorema de Bolzano-Weierstrass, o conxunto ten algún punto de acumulación.

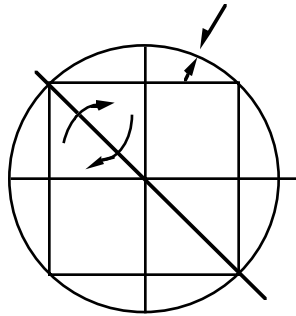
Os puntos de D coa mesma ordenada forman unha sucesión converxente: para m fixo,

$$\left\{ \left(\frac{1}{n+m}, \frac{m}{m-1} \right) \right\} \longrightarrow \left(0, \frac{m}{m-1} \right).$$

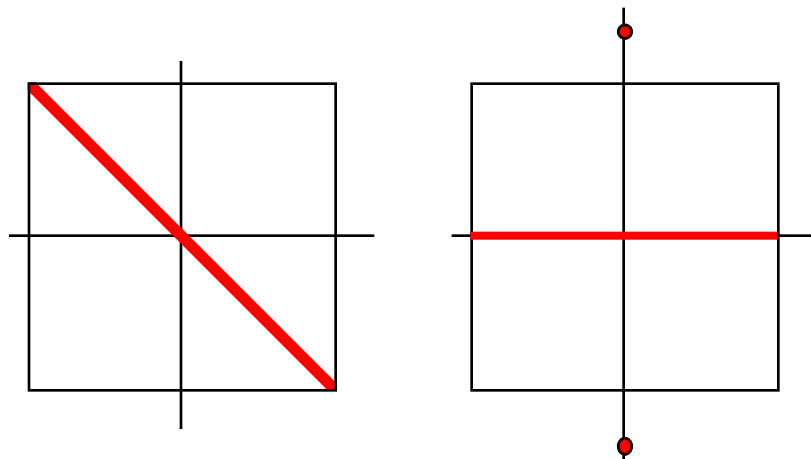
Como todos os puntos da sucesión son diferentes do punto límite, este é un punto de acumulación do conxunto. Existen outras sucesións converxentes a puntos de acumulación. Por exemplo, a sucesión

$$\left\{ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right) \right\}.$$

2. (a) A función é a reflexión respecto da segunda diagonal, dentro do cadrado, e a aplicación sobre a circunferencia de raio $\sqrt{2}$, fora, segundo indica a figura:



A circunferencia de centro a orixe e raio $\sqrt{2}$ vai nela mesma. A diagonal $y = x$ vai no segmento $|x| \leq 1$ da propia diagonal. A recta $x = 0$ ten como imaxe os puntos $(0, \sqrt{2})$ e $(0, -\sqrt{2})$ e o segmento $y = 0, -1 \leq x \leq 1$, tal como se indica na figura:



- (b) Como a norma $\| \cdot \|_{\infty}$ define unha función continua de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, os conxuntos $\{\|(x, y)\|_{\infty} < 1\}$ e $\{\|(x, y)\|_{\infty} > 1\}$ son subconxuntos abertos de $\mathbb{R}^2$. É doado argumentar que a restricción de f a estes conxuntos é continua, logo, por ser abertos, a propia función é continua nos seus puntos.

Resta a considerar a continuidade de f nos puntos do conxunto $\{\|(x, y)\| = 1\}$.

Sexa (x, y) un punto deste conxunto. Consideremos a sucesión

$$\left\{ \frac{n+1}{n} (x, y) \right\},$$

que converxe a el. A sucesión imaxe é constante, cada termo é $\sqrt{2} \cdot \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|_2}$. Iste punto é distinto de $f(x, y)$, agás para $A = (-1, 1)$ e $B = (1, -1)$. Así, nos puntos do conxunto $\{\|(x, y)\| = 1\}$, agás, se cadra, nos puntos A e B , a función non é continua.

Nos puntos A e B é doado comprobar directamente que se verifica a definición de continuidade. Abonda, dado un ε pequeno, tomar $\delta = \varepsilon$, como se ve graficamente de forma inmediata.

4. (a) Temos visto que $\mathbb{S}^1$ é conexo. Un argumento diferente ao usado é o seguinte: Consideremos as seguintes funcións continuas

$$f, g: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1,$$

$$f(x) = (x, \sqrt{1-x^2}),$$

$$g(x) = (x, -\sqrt{1-x^2}).$$

Como imaxes continuas dun intervalo, tanto $f([-1, 1])$ como $g([-1, 1])$ son conxuntos conexos, a súa intersección é non baleira e a súa unión é $\mathbb{S}^1$.

(b) As aplicacións

$$h_{(a,b)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad h_{(a,b)}(x,y) = (x+a, y+b), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

e

$$h_r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad h_r(x,y) = (r \cdot x, r \cdot y), \quad r \in (0, +\infty),$$

translación e homotecia, respectivamente, son homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$. Unha translación permite levar unha circunferencia calquera a outra de centro a orixe e mesmo raio. Unha homotecia h_r leva unha circunferencia de centro a orixe a outra concéntrica, de raio dado. Conclúese tendo en conta que a composición de homeomorfismos é un homeomorfismo.

(c) Cada C_n é conexo, pois é unha circunferencia, logo, homeomorfa a $\mathbb{S}^1$. Todos os conxuntos C_n teñen o punto $(0,0)$ en común. Dados dous puntos A e B do conxunto C , se $A \in C_n$ e $B \in C_m$, A e B pertencen ambos a $C_n \cup C_m$, unión de dous conxuntos conexos cun punto común.