

Prof. Agustín Bonome Dopico

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

1. (a) Proba que a unión finita de conxuntos pechados é un conxunto pechado
(b) Estuda se é pechado o seguinte subconxunto de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \bigcup_{n \geq 2} B_2[(0, 0), 1 - 1/n] .$$

(1,75 puntos)

Resposta a 1.(b)

Imos ver que $A = B_2((0, 0), 1)$; polo tanto, A non será pechado.

Certamente, cada conxunto $B_2[(0, 0), 1 - 1/n]$ está contido en $B_2((0, 0), 1)$, polo que A , unión deles, tamén está contido en $B_2((0, 0), 1)$.

Resta por probar a outra inclusión, $B_2((0, 0), 1) \subset A$. Sexa $x \in B_2((0, 0), 1)$. Significa que $d(0, x) < 1$. Ou sexa, $1 - d(0, x) > 0$. Logo, existirá un $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < 1 - d(0, x)$ e, pois, $d(0, x) < 1 - 1/n$. Así, $x \in B_2[(0, 0), 1 - 1/n]$, e x pertence á unión.

2. Proba que un conxunto é pechado se, e só se contén todos os seus puntos de acumulación.

(1,75 puntos)

3. (a) Sexan A e B subconxuntos pechados de $\mathbb{R}^p$. Sexan $f: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ e $g: B \rightarrow \mathbb{R}^q$ dúas funcións continuas, tais que $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$. Define a función $h: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}^q$ combinada de f e g , e demostra que é continua.

- (b) Utiliza este resultado para probar a continuidade da función $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x, y) = \min\{x, y\} .$$

(2 puntos)

Resposta a 3.(b)

Sexan $pr_1, pr_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ as dúas proxeccións coordenadas: $pr_1(x, y) = x$, $pr_2(x, y) = y$. Son funcións continuas. A función h pódese definir como función combinada na forma seguinte:

$$h(x, y) = \begin{cases} pr_1(x, y) & \text{se } x \leq y, \\ pr_2(x, y) & \text{se } y \leq x. \end{cases}$$

4. Estuda a continuidade da función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy, xy) & \text{se } xy \geq 0, \\ (x^2, -y) & \text{se } xy < 0. \end{cases}$$

(2 puntos)

Resposta

As relacións $xy < 0$ e $xy > 0$ definen subconxuntos abertos U e V de $\mathbb{R}^2$. Unha maneira de xustificar esta afirmación é expresalos como imaxes recíprocas das semirectas $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ pola función continua de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ que a cada punto (x, y) fai corresponder o número xy .

As restriccións de f a U e a V son funcións continuas, como se comproba compoñendoas coas proxeccións coordenadas. Como U e V son abertos, tamén f é continua nos puntos destes conxuntos.

Resta por estudar a continuidade nos puntos dos eixos, onde $xy = 0$. Dado un punto $(x, 0)$, con $x \neq 0$, consideramos a sucesión $\{(x, -x/n)\}$, que converge a $(x, 0)$. A sucesión imaxe é $\{(x^2, x/n)\}$, que converge a $(x^2, 0)$. Logo non converge a $f(x, 0) = (0, 0)$, e a función non é continua nestes puntos. Analogamente se argumentaría para os puntos $(0, y)$, con $y \neq 0$.

Estudemos, finalmente, a continuidade no punto $(0, 0)$. Imos considerar dúas formas distintas de facelo.

i) *Por continuidade secuencial.* Sexa $\{(x_n, y_n)\}$ unha sucesión que converxa a $(0, 0)$. Trátase de ver que a sucesión imaxe, á que denotaremos $\{(\bar{x}_n, \bar{y}_n)\}$, tamén converxe a $(0, 0)$. Que a sucesión $\{(x_n, y_n)\}$ converxa a $(0, 0)$ significa que as dúas sucesións numéricas das coordenadas converxen a 0. Logo, para n grande, será $|x_n| < 1$, $|y_n| < 1$. Resulta que, para n grande, $|\bar{x}_n| < |x_n|$ e $|\bar{y}_n| \leq |y_n|$. E as dúas sucesións coordenadas da sucesión imaxe converxen a 0.

ii) *Pola definición de continuidade.* As dúas funcións con que se define f coinciden no punto $(0, 0)$. Poderíamos, pois, estender o seu dominio de definición engadíndolle o punto $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy, xy) & \text{se } xy \geq 0, \\ (x^2, -y) & \text{se } xy < 0 \text{ ou } x = 0, y = 0. \end{cases}$$

E, polo mesmo argumento usado antes de estendelas, serían continuas. En particular, as dúas serían continuas no punto $(0, 0)$. O que significa que dado $\epsilon > 0$, existirá un $\delta_1 > 0$ e un $\delta_2 > 0$ de xeito que se verifique a condición de continuidade para cada función. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, conclúese que f é continua no $(0, 0)$.

iii) *Pola definición de continuidade, outra forma.* Para puntos próximos ao $(0, 0)$, concretamente, para puntos (x, y) tais que $|x| < 1$, $|y| < 1$, a función verifica

$$\|f(x, y)\| \leq \|(x, y)\|.$$

En efecto, se utilizamos a notación $f(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$, verifícase $|\bar{x}| \leq |x|$, $|\bar{y}| \leq |y|$. Logo, na condición de continuidade no punto $(0, 0)$, dado $\epsilon > 0$, abonda tomar $\delta = \epsilon$ (se ϵ fora maior que 1, habería que tomar $\delta = 1$).

5. Considera os seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 2\}; \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}; \quad C = B_2((-1, 0), 1).$$

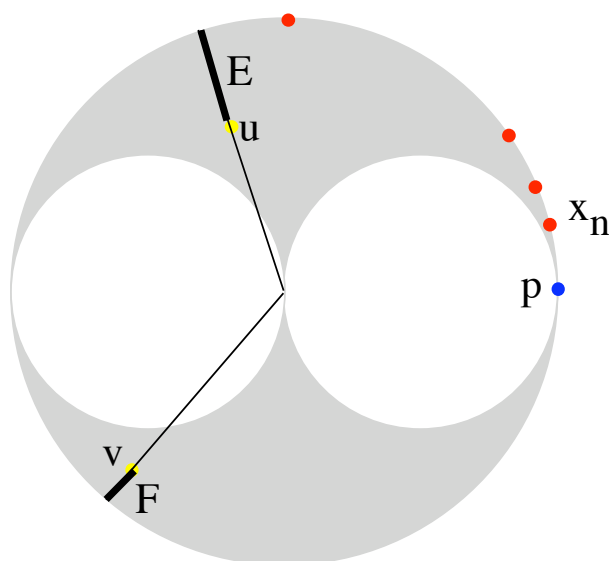
Considera o conxunto $X = A - (B \cup C)$.

- (a) ¿É $\mathbf{p} = (2, 0)$ punto de acumulación de X ? En caso de resposta afirmativa, constrúe unha sucesión de puntos de X , todos diferentes de $\mathbf{p}$, que converxa a $\mathbf{p}$
- (b) Estuda se X é compacto ou conexo.

(2,5 puntos)

Resposta

A sucesión $\{(\sqrt{4 - 1/n^2}, 1/n)\}$ está en X e converxe a $\mathbf{p}$.



Os conxuntos B e C son abertos (son bolas abertas). Logo $\mathbb{R}^2 - (B \cup C)$ é un conxunto pechado. A é un conxunto pechado (é unha bola pechada). Logo, o conxunto

$$X = A \cap (\mathbb{R}^2 - (B \cup C))$$

é intersección de dous conxuntos pechados, logo, pechado.

Como X está contido na bola A , é limitado. Logo X é compacto.

Para concluír que X é conexo, imos ver que dados dous puntos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de X , existe un subconxunto conexo que os contén. Supoñamos que os dous son diferentes de 0 . O conxunto conexo vai ser $E \cup F \cup S$, onde

$$E = \{t\mathbf{u} \mid 1 \leq t \leq \frac{2}{\|\mathbf{u}\|}\},$$

$$F = \{t\mathbf{v} \mid 1 \leq t \leq \frac{2}{\|\mathbf{v}\|}\} \quad \text{e}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 2\}.$$

Se $\mathbf{u} = 0$, tómasse $A = \{(0, t) \mid 0 \leq t \leq 2\}$.