

1. Estudia a continuidade da función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, -y) & \text{se } \|(x, y)\|_2 < 1 \\ (x, y) & \text{se } \|(x, y)\|_2 \geq 1. \end{cases}$$

2. Considera o conxunto de funcións reais continuas con dominio o intervalo unidade $\mathcal{C}(I)$. Demostra que a función

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in I} \{|f(x) - g(x)|\}, \quad f, g \in \mathcal{C}(I),$$

é unha métrica.

Fora de programa

3. Sexa A un subconxunto dun espacio métrico M . Demostra

$$\text{Cl}(A) = \{x \in M \mid d(x, A) = 0\}.$$

4. Atopa unha cobertura aberta para cada un dos seguintes conxuntos, que non admita ningunha subcobertura finita:

$$(0, 1); \quad [0, 1] \cap \mathbb{Q}; \quad B_2((0, 0), 1); \quad [-1, 1] \times [-1, 1] - \{(0, 0)\}.$$

5. Sexa M un espacio métrico compacto. Demostra que todo subconxunto infinito de M posúe un punto de acumulación.

Os enunciados 3 e 5 son válidos para calquera espacio X (en lugar de M), na terminoloxía do curso
--