

As preguntas teóricas 1 e 2 adáptanse ao programa substituíndo espacio métrico (M,d) por espacio X , na terminoloxía do curso.

Enunciado _____ *Xuño de 1999*

1. Sexa (M,d) un espacio métrico, E un subconxunto de M . Demostre que E é pechado se e soamente se contén todos os seus puntos de acumulación.

2. Sexan M e N espacios métricos, $f: M \rightarrow N$ unha función. Demostre que f é continua nun punto x_0 se e soamente se é secuencialmente continua nese punto.

3. Estude a continuidade da función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } x < 0 \\ (x^2 + y, x \cdot y) & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

considerando no dominio e no rango a métrica euclidiana.

4. Sexan $I = [0,1]$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ unha función continua.

- (a) Demostre que a función

$$F: I \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por $F(x,y) = (f(x), f(y))$ é continua.

- (b) Demostre que existe $\max\{|f(x) - f(y)|, x, y \in I\}$.

- (c) Sexa $m = \max\{|f(x) - f(y)|, x, y \in I\}$. Demostre que, dado t con $0 \leq t \leq m$, existen puntos x_0, y_0 en I tales que $|f(x_0) - f(y_0)| = t$.

5. Sexa $X = \{1, 2, \dots, p\}$. Demostre que a función

$$h: (\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{sup}) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_{\infty})$$

dada por

$$h(f) = (f(1), f(2), \dots, f(p)),$$

é linear, sobrexectiva e conserva as normas. Conclúide que é unha isometría.

Fora de
programa