

Topoloxía dos espazos euclidianos

Curso 2004-05

Seminario

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Tema 0 Preliminares

0.1 Calculade a unión e a intersección das seguintes familias de subconxuntos de $\mathbb{R}$:

$$\{[-n, n], n \in \mathbb{N}\}; \quad \{[n, \infty), n \in \mathbb{N}\}; \quad \{(0, n), n \in \mathbb{N}\}.$$

0.2 Considerade os seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1/n^2\}$$

$$E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1/n\}$$

$$L_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > r\}$$

Calculade a unión e intersección das familias

$$\{B_n, n \in \mathbb{N}\}, \{E_n, n \in \mathbb{N}\}, \{L_r, r \in (0, +\infty)\}.$$

0.3 Considerade a función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Calculade a imaxe e a imaxe recíproca por f dos seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{1/n, n = 1, 2, 3, \dots\}; \quad B = [-2, -1]; \quad C = \mathbb{N}.$$

0.4 Construíde funcións entre conxuntos finitos. Por exemplo, unha función f entre os conxuntos $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{u, v, w, y, z\}$, dada por

$$f(a) = u, \quad f(b) = v, \quad f(c) = w, \quad f(d) = w.$$

Considerade diversos subconxuntos $A \subset X$, $B \subset Y$, e comparade B con $f(f^{-1}(B))$ e A con $f^{-1}(f(A))$.

Para $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$, comparade

$$f(A_1 \cup A_2) \quad \text{con} \quad f(A_1) \cup f(A_2)$$

e

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) \quad \text{con} \quad f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Facede o análogo para a intersección

0.5 Sexa $f : X \rightarrow Y$ unha aplicación, A un subconxunto de X , B un subconxunto de Y .

a) Probade $A \subset f^{-1}f(A)$. ¿Cando se verifica a igualdade? Poñede un exemplo de inclusión estrita.

b) Probade $f(f^{-1}(B)) \subset B$. ¿Cando se verifica a igualdade? Poñede un exemplo de inclusión estrita.

0.6 Considerade a función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{se } 2 < x \end{cases}$$

a) Debuxade o grafo da función. ¿É f inxectiva? ¿É sobre?

b) Calculade:

$$f((1, 3)); f([-2, 2]); f^{-1}((0, 1)); f^{-1}((-4, 4)).$$

c) Sexa $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a función dada por $g(x) = |x|$. Calculade a composición $f \circ g$.

d) Calculade $(f \circ g)^{-1}((-2, 5])$.

0.7 Sexa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a función $f(x, y) = (3 - x, 2y + 1)$. Demostrade que f é bixectiva e calculade a función inversa f^{-1} .

0.8 Debuxade os seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}^2$:

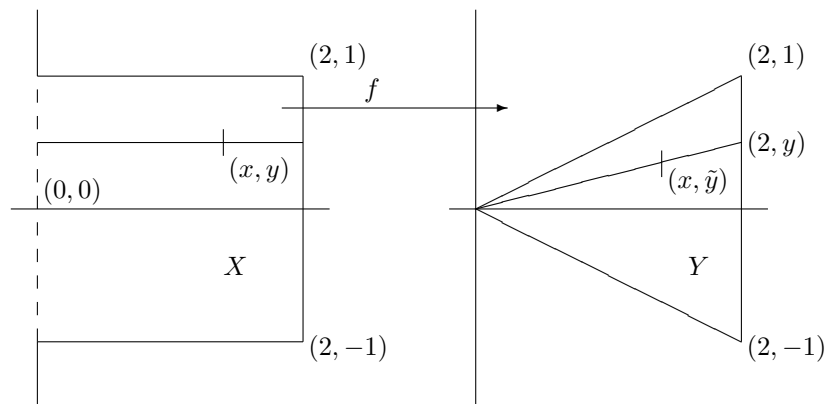
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2x + 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 3| + |y + 2| \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x + 1|, |y - 2|\} \leq 2\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2, n = 1, 2, 3, 4\}.$$

0.9 Expresade analiticamente os seguintes subconxuntos X e Y de $\mathbb{R}^2$, e escribide a función $f(x, y) = (x, \tilde{y})$ entre eles que se indica no debuxo:



Tema 1 Espazos euclidianos

1.1 Sexan $x, y \in \mathbb{R}^p$. Demostrate as seguintes desigualdades:

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

1.2 Sexa $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ un punto de $\mathbb{R}^p$. Demostrate as seguintes desigualdades:

$$|x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{p} \cdot \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|\}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

1.3 Sexan $x, y \in \mathbb{R}^p$. Demostrate que a seguinte igualdade

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

se verifica sse $\langle x, y \rangle = 0$. Neste caso, dise que x e y son vectores *ortogonais* ou *perpendiculares*.

1.4 Sexan x e y dous vectores non nulos de $\mathbb{R}^p$. Demostrate que a seguinte igualdade

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$$

verifícase sse existe un número λ estritamente positivo tal que $x = \lambda y$.

(Indicación: Dicar $x = \lambda y$ é o mesmo que afirmar $\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = 0$.)

1.5 Sexa $a > 0$ un número real non negativo. Calcule o diámetro do conxunto

$$E = [-a, a] \times (-a, a).$$

1.6 Sexan A e B subconxuntos de $\mathbb{R}^p$. Probade a desigualdade

$$\delta(A \cup B) \leq d(A, B) + \delta(A) + \delta(B).$$

1.7 a) Dado $z \in \mathbb{R}^p$, defínese a *translación*

$$t_z : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

pola fórmula $t_z(x) = x + z$. Calcule $d(t_z(x), t_z(y))$.

b) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, defínese a *homotecia*

$$h_\lambda : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

por $h_\lambda(x) = \lambda \cdot x$. Calcule $d(h_\lambda(x), h_\lambda(y))$.

1.8 a) Considera a *rotación* R_α de ángulo α en $\mathbb{R}^2$, aplicación linear dada pola matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Así, a imaxe dun punto (x_1, x_2) é o punto $(x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, calcula $d(R_\alpha(x), R_\alpha(y))$.

b) Fai o mesmo cálculo para a *reflexión* polo eixo de ordenadas, a aplicación linear S de $\mathbb{R}^2$ en si mesmo, que ao punto (x_1, x_2) fai corresponder o punto $(-x_1, x_2)$.

1.9 Estudade o carácter aberto ou pechado dos seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x/n, n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 3| \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x + 1|, |y - 2|\} < 2\}$$

1.10 Considerade as seguintes familias de subconxuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$E_q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > q\}, q \in \mathbb{Q}, 1 \leq q;$$

$$F_q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < q\}, q \in \mathbb{Q}, q \geq \sqrt{2}.$$

Estudade se a súa intersección é un conxunto aberto ou pechado.

1.11 Presentade toda bola aberta $B_p(x, r)$ como unión de bolas pechadas. ¿Poderíades representala como intersección de bolas pechadas?

Presentade toda bola pechada $B_p[x, r]$ como intersección de bolas abertas. ¿Poderíades presentala como unión de bolas abertas?

1.12 Construíde conxuntos A , B e C en $\mathbb{R}^2$ de xeito que:

- i) A non sexa aberto, pero exista un punto x_0 en A tal que $A - \{x_0\}$ sexa aberto.
- ii) B non sexa pechado, pero exista un punto x_0 en $\mathbb{R}^2$ tal que $B \cup \{x_0\}$ sexa pechado.
- iii) C sexa pechado e exista un punto x_0 en C tal que $C - \{x_0\}$ siga a ser pechado.

1.13 Sexa $A \subset \mathbb{R}^p$ un subconxunto non baleiro. Sexa r un número estritamente positivo. Defínese o conxunto $V_r(A)$ por

$$V_r(A) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid d(y, A) < r\}.$$

Demostre que $V_r(A)$ é un conxunto aberto e que contén a A .

1.14 Sexa $F \subset \mathbb{R}^p$ un conxunto pechado. Sexa $A \subset \mathbb{R}^p$ tal que $A \cap F$ e $A \cup F$ sexan conxuntos abertos. Demostre que entón A é un conxunto aberto.

1.15 Describide os abertos relativos de $\mathbb{Z}$.

1.16 Considerade o espazo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, subespazo de $\mathbb{R}^2$. Sexa

$$A = \{(x, y) \in X \mid x^2 + (y - 1)^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in X \mid x^2 + (y + 1)^2 < 1\}.$$

¿É A aberto en X ou en $\mathbb{R}^2$?

1.17 Sexa L unha recta en $\mathbb{R}^2$ e U un intervalo aberto en L . Encontre un conxunto aberto V en $\mathbb{R}^2$ tal que $V \cap L = U$.

1.18 Dade exemplos de

- a) Unha sucesión contractiva $\{K_n, n \in \mathbb{N}\}$ de conxuntos pechados non baleiros no espazo $(0, 1)$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(K_n) = 0$, e tal que a súa intersección sexa baleira.
- b) Unha sucesión contractiva en $\mathbb{R}$ de conxuntos non baleiros U_n , cumprindo a condición $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(U_n) = 0$, pero $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset$.
- c) Unha sucesión contractiva en $\mathbb{R}$ de conxuntos pechados non baleiros E_n con intersección baleira, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$.

Tema 2 Converxencia

2.1 Sexan $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ sucesións en X , as dúas converxentes a un mesmo punto x_0 . Demostre que a sucesión numérica $\{d(x_n, x'_n)\}$ converge a cero.

2.2 Sexa $\{x_n\}$ unha sucesión converxente en $\mathbb{R}^p$, con límite x_0 . Supoñamos que existe un $c \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$\|x_n - c\| \leq r$$

para valores grandes de n . Demostre que $\|x_0 - c\| \leq r$.

2.3 Sexa E un subconxunto limitado de $\mathbb{R}$. Demostre que o seu ínfimo e o seu supremo ou pertencen a E ou son puntos de acumulación de E .

2.4 Utilizando o criterio de converxencia de sucesións, demostre que toda recta en $\mathbb{R}^2$ é un conxunto pechado.

2.5 Sexa $\{x_n\}$ unha sucesión en X , converxente a un punto x_0 . Demostre que o conxunto $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ é pechado.

2.6 Considerade o subconxunto A de $\mathbb{R}^2$ formado polos puntos da forma $(1/n, 1/m)$, con $n, m \in \mathbb{N}$ e $n \neq m$. Facede un debuxo que axude a visualizar este conxunto.

1. Sexan a e b dous enteiros naturais dados. Razoade cales dos seguintes puntos son de acumulación de A :

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right); \quad \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right); \quad \left(\frac{1}{a}, 0\right); \quad \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a+1}\right); \quad (0, 0).$$

Para cada punto que sexa de acumulación, construíde unha sucesión de puntos de A converxendo a el.

2. ¿Coñeces algún punto de acumulación que non se inclúa na lista anterior?

2.7 Demostre que no espazo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ a sucesión

$$\{(1/n, 1 + 2/n)\}$$

é de Cauchy. ¿É converxente?

2.8 Sexa $\{x_n\}$ unha sucesión en X . Para cada $k \in \mathbb{N}$, sexa $A_k = \{x_n, n \geq k\}$. Demostre que $\{x_n\}$ é de Cauchy sse $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(A_k) = 0$.

2.9 Sexa $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, onde cada x_n é un punto de $\mathbb{R}^2$ que verifica a seguinte condición:

$$\frac{n-1}{n} < \|x_n\| < \frac{n}{n+1}.$$

Sexa E' o conxunto derivado de E .

1. ¿Pode ser $E' = \emptyset$?
2. ¿Pode ter E' un único punto?
3. ¿Pode ter E' máis dun punto?
4. Sexa $\mathbb{S}^1$ a circunferencia unitaria. Demostre que $E' \subset \mathbb{S}^1$.

5. ¿Pode ser $E' = \mathbb{S}^1$? (Dar unha resposta formalmente completa é difícil).

2.10 Considerade a sucesión de intervalos pechados $[a_n, b_n]$ en $\mathbb{R}$ dados por

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Comprobade que se verifican as desigualdades

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < b_{n+1} < b_n < \cdots < b_2 < b_1.$$

Comprobade que a sucesión $\{b_n - a_n\}$ converxe a cero.

¿Que podedes dicir da intersección de todos os intervalos?

2.11 Obradoiro

Sexa $\{x_n\}$ unha sucesión de puntos en $\mathbb{R}^p$. Sexa $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ o conxunto de puntos da sucesión. Sexa A' o conxunto derivado de A .

1. (a) ¿Pode ser $A' = \emptyset$?
- (b) ¿Pode ter A' un único punto?
- (c) ¿Pode ter A' un número finito de puntos maior que 1?

En caso de resposta afirmativa, poñede algún exemplo. Noutro caso, razoade a resposta.

2. Supoñede agora que a sucesión $\{x_n\}$ é de Cauchy, e volvede contestar as preguntas anteriores neste caso particular, poñendo tamén exemplos no caso de resposta afirmativa, e razoando as negativas.
3. Considerade a sucesión en $\mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$x_n = \begin{cases} k + \frac{1}{n} & \text{se } n = k^s, s \geq 1, \text{ sendo } k \text{ un número primo,} \\ n & \text{se } n \text{ non é potencia dun número primo.} \end{cases}$$

Comprobade que todo número primo é punto de acumulación de A .

Tema 3 Continuidade

3.1 Sexa $X \subset \mathbb{R}^p$ un espazo, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ unha función continua. Demostrade que se x_0 é un punto de X tal que $f(x_0) > 0$, daquela existe unha bola aberta de centro x_0 en X tal que f toma nela valores estritamente positivos.

3.2 Estudade a continuidade da función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } xy \leq 0 \\ (-2x, -2y) & \text{se } xy > 0 \end{cases}$$

3.3 Estudade se a seguinte función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{(x, y)}{|x| + |y|}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = (0, 0). \end{cases}$$

é secuencialmente continua no punto $(0, 0)$.

3.4 Considerade a seguinte función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{cases} (y, y^2/x) & \text{se } xy > 0, \\ (x^2/y, x) & \text{se } xy < 0, \\ (0, 0) & \text{se } xy = 0. \end{cases}$$

1. Estudade a converxencia das sucesións $\{f(1, 1/n)\}$ e $\{f(1, -1/n)\}$.
2. Estudade a continuidade da función nos puntos dos eixos.

3.5 Sexan f e g dúas aplicacións con dominio e rango $\mathbb{R}$. Supoñamos que cumpren

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad g(x + y) = g(x)g(y).$$

Demostrade que son continuas sse o son no punto 0.

(Indicación: Para a aplicación f , considera que se unha sucesión $\{x_n\}$ converxe a x_0 , daquela $\{x_n - x_0\} \rightarrow 0$ e $\{f(x_n - x_0)\} \rightarrow 0$.

Para g , procédese de forma análoga, despois de comprobar que ou $g(x) = 0$ para todo x , ou nunca $g(x) = 0$.)

3.6 Sexa $X \subset \mathbb{R}^p$ un espazo, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ unha función. Demostrade que f é continua sse os conxuntos $f^{-1}((-\infty, a))$ e $f^{-1}((b, \infty))$ son abertos, calquera que sexan os números reais a e b .

3.7 Axudándose do concepto de continuidade, estudade o carácter aberto ou pechado dos seguintes conxuntos:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - yz < 2\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(1 + y^5) = 1\}.$$

3.8 Sexa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicación *parte enteira*, dada por $f(x) = m$, onde m é o número enteiro que verifica $m \leq x < m + 1$. Demostrade que $f|_{\mathbb{Z}}$ é continua e que f non é continua en ningún punto de $\mathbb{Z}$.

3.9 Estudade a continuidade da función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y + x^2) & \text{se } x > 0 \\ (x, y - x^2) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

3.10 Sexa

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \geq x^2 + 1 \text{ ou } xy = 0\}.$$

Estudade a continuidade da función $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, 2y) & \text{se } xy > 0 \\ (0, 0) & \text{se } xy = 0 \\ (x, y) & \text{se } xy < 0 \end{cases}$$

3.11 Estudade a continuidade da función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (y, x) & \text{se } x \geq y, \\ (x, y) & \text{se } x < y. \end{cases}$$

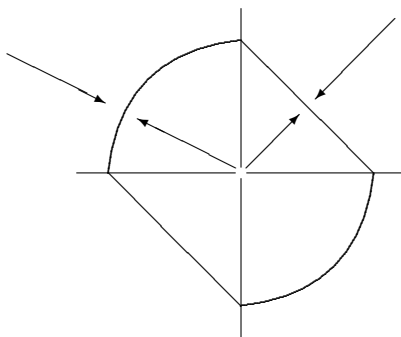
3.12 Estuda a continuidade da función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|} & \text{se } \|(x, y)\| \geq 1 \\ (x, y) & \text{se } \|(x, y)\| < 1 \end{cases}$$

3.13 Sexa

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1, xy \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, xy \leq 0\}.$$

Buscade a expresión analítica da función $f: \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow E$ que se indica na figura, e demostrade que é continua.



3.14 Sexan $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ dúas aplicacións continuas, D un subconxunto denso de X . Probade:

$$\begin{aligned} &\{f(x) \leq g(x) \text{ para todo punto } x \text{ de } D\} \\ &\quad \Rightarrow \\ &\{f(x) \leq g(x) \text{ para todo punto } x \text{ de } X\}. \end{aligned}$$

¿Segue a ser válido o resultado de substituírmos $\leq$ por $<$ nos dous membros da implicación?

3.15 Sexa $f : X \rightarrow Y$ unha aplicación continua e sobrexectiva, D un subconxunto denso de X . Demostrate que $f(D)$ é denso en Y .

3.16 Sexa $E = \mathbb{R} - \{-1\}$, $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ as funcións dadas por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}; \quad g(x) = \frac{1}{x^3 + 1}.$$

¿Existen extensións de f ou g a $\mathbb{R}$? En caso de resposta afirmativa, constrúe unha extensión. ¿É única?

3.17 Considera o espazo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$ e o subespazo

$$E = \{(x, y) \in X \mid x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Sexa $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ a función dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } y \leq x \\ \frac{x}{y} \cdot (x, y) & \text{se } 0 < x \leq y \end{cases}$$

1. Sexa $\{(x_n, y_n)\}$ unha sucesión en E que converxe a $(0, 0)$. Demostra que a sucesión imaxe $\{f(x_n, y_n)\}$ tamén converxe a $(0, 0)$.
 2. Demostra que f é continua.
 3. Sexan $A = \{(x, y) \in E \mid x = 1/2\}$, $B = \{(x, y) \in E \mid y = 4\}$. Debuxa $f(A)$ e $f(B)$.
 4. Pódese estender f a todo X ? En caso de resposta afirmativa, constrúe unha extensión.
 5. De existir unha extensión, sería única?
- 3.18
1. Sexa $I = [0, 1]$. Demostrate que toda función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza o máximo. (Indicación: primeiro supón que a imaxe non é limitada superiormente. Despois supón que o supremo non pertence á imaxe. Para chegar a unha contradicción usa, en ambos casos, a continuidade secuencial).
 2. Demostrate que a seguinte propiedade dun espazo $X \subset \mathbb{R}$ é topolóxica:
“toda función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza o máximo.”
 3. Conclúe que o intervalo unidade pechado I non é homeomorfo nin a $\mathbb{R}$ nin a unha semirrecta pechada.
- 3.19 Constrúe un homeomorfismo entre a coroa circular $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ e o cilindro $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

3.20 Obradoiro

Defínese unha función

$$\| \cdot \|_{\infty} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

pola expresión $\|x\|_{\infty} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, sendo $x = (x_1, x_2)$.

1. Comprobade que esta aplicación ten as mesmas propiedades que a norma:

- (a) $\|x\|_{\infty} \geq 0$ e $\|x\|_{\infty} = 0$ sse $x = 0$.
- (b) $\|a \cdot x\|_{\infty} = |a| \cdot \|x\|_{\infty}$, $a \in \mathbb{R}$.
- (c) $\|x + y\|_{\infty} \leq \|x\|_{\infty} + \|y\|_{\infty}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Curiosidade: podería definirse unha *distancia* usando $\| \cdot \|_{\infty}$, tal como se fixo coa norma para definir a distancia euclidiana:

$$d_{\infty}(x, y) = \|x - y\|_{\infty}.$$

¿Como serían as bolas?

2. Debuxade os conxuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_{\infty} \leq 1\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_{\infty} = 1\}.$$

3. Comprobade as desigualdades

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\| \leq \sqrt{2} \cdot \|x\|_{\infty}.$$

4. Caracterizade a converxencia de sucesións en $\mathbb{R}^2$ usando $\| \cdot \|_{\infty}$, de forma análoga a como se fai usando a norma euclidiana.

5. Probade que $\| \cdot \|_{\infty}$ é unha función continua.

6. Estudade a continuidade da función $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$h(x) = \frac{\|x\|_{\infty}}{\|x\|} \cdot x, \quad \text{se } x \neq 0,$$

$$h(0) = 0.$$

7. Construíde un homeomorfismo entre os conxuntos

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_{\infty} \leq 1\} \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Tema 4 Compacidade e conexidade

- 4.1 Atopade unha cobertura aberta para cada un dos seguintes conxuntos, que non admita ningunha subcobertura finita:

$$(0, 1); \quad [0, 1] \cap \mathbb{Q}; \quad B_2((0, 0), 1); \quad [-1, 1] \times [-1, 1] - \{(0, 0)\}.$$

- 4.2 Sexa $\{K_n, n \in \mathbb{N}\}$ unha familia contractiva de conxuntos compactos non baleiros en $\mathbb{R}^p$, ou sexa, $K_n \supseteq K_{n+1}$.

Demostrate que a intersección K da familia é un conxunto non baleiro:

$$K = \bigcap K_n \neq \emptyset.$$

- 4.3 Considerade a seguinte colección de circunferencias en $\mathbb{R}^2$:

$$S_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1/m)^2 + y^2 = 1/m^2\},$$

onde $m \in \mathbb{N}$. Demostrate que a súa unión,

$$S = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} S_m,$$

é un conxunto compacto. As veces denomínase *pendente infinito* ou *pendente hawaino*.

- 4.4 Sexa $\mathcal{U} = \{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ unha cobertura aberta de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Demostrate que existe un $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{U}$ é unha cobertura da coroa circular

$$V_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \epsilon < \|x\| < 1 + \epsilon\}.$$

(Poderíase substituír $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{S}^1$ por un compacto K , facendo $V_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(x, K) < \epsilon\}$.)

- 4.5 Sexa $X \subset \mathbb{R}^p$ un conxunto conexo con máis dun punto. Demostrate que é infinito.

- 4.6 Sexan A e B subconxuntos compactos e disxuntos de $\mathbb{R}^p$. Demostrate que $d(A, B) > 0$. Chega con que A e B sexan pechados en vez de compactos?

- 4.7 Considerade os seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$X_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\},$$

$$X_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y = x/m\},$$

$$Y_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1/m, y = x/m\},$$

$$X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m, \quad Y = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Y_m, \quad Z = X \cup X_0.$$

Sexa $h : X \rightarrow Y$ a función dada pola fórmula $h(x, y) = (x/m, y/m)$ se $(x, y) \in X_m$.

1. Probade que h é continua
2. Demostrate que h admite unha extensión única a Z
3. Comprobade que Z é compacto
4. Discutide se $h : X \rightarrow Y$ é un homeomorfismo.

- 4.8 Demostrate que $\mathbb{S}^2$ non é homeomorfa a $\mathbb{R}^2$.
- 4.9 Demostrate que $K \subset \mathbb{R}^p$ é compacto sse toda función real continua e positiva (ou sexa, que toma valores estritamente positivos) posúe ínfimo positivo.
- 4.10 Demostrate que un espazo $X \subset \mathbb{R}^p$ é conexo sse non existe ningunha aplicación continua e sobrexectiva de X en $\{0, 1\}$.
- 4.11 1. Sexa E un conxunto conexo nun espazo X , p un punto de acumulación de E . Demostrate que $E \cup \{p\}$ é un conxunto conexo.
2. Conclúide que se E é conexo, a súa adherencia tamén.
- 4.12 Estudade o carácter compacto e conexo dos seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}^2$:
- a) $A = B_2[(0, 0), 2] - B_2((0, 0), 1)$; b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$;
c) $C = (\{0\} \times (0, 1]) \cup ((0, 1] \times \{0\})$; d) $D = C \cup (\{1/n, n \in \mathbb{N}\} \times [0, 1])$;
e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, y \leq x\}$, f) $F = E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1, x \neq 0\}$.
g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-2=0\}$.
- 4.13 a) Sexa P un punto no espazo $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$. Demostrate que existen infinitas rectas que pasan por P , completamente contidas no espazo.
(Indicación: utilizade o feito de ser $\mathbb{Q}^2$ enumerábel)
b) Demostrate que $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ é conexo.
- 4.14 Sexan $I = [0, 1]$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ unha función continua.
a) Demostrate que a función

$$F: I \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
dada por $F(x, y) = (f(x), f(y))$ é continua.
b) Demostrate que existe $\max\{|f(x) - f(y)|, x, y \in I\}$.
c) Sexa $m = \max\{|f(x) - f(y)|, x, y \in I\}$. Demostrate que, dado t con $0 \leq t \leq m$, existen puntos x_0, y_0 en I tales que $|f(x_0) - f(y_0)| = t$.
- 4.15 a) Demostrate que $\mathbb{S}^1$ non é homeomorfa a $[0, 1]$.
b) Demostra que $\mathbb{S}^2$ menos os polos norte e sur é un conxunto conexo.
c) Demostra que $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}^1$ non son homeomorfos.
- 4.16 Razoade a certeza ou falsidade das seguintes afirmacións:
1. Se $U \subset X \subset \mathbb{R}^p$ e U é aberto en $\mathbb{R}^p$, entón U é aberto en X .
 2. Se $G = H \cup L$ é aberto en $\mathbb{R}^p$ entón H e L son abertos en $\mathbb{R}^p$.
 3. Os únicos subconxuntos compactos de $\mathbb{Q}$ son os finitos.
 4. Sexa X un subconxunto limitado de $\mathbb{R}^p$. Se K é un conxunto pechado no espazo X , daquela K é compacto.
 5. Nun conxunto conexo con máis dun punto todos os puntos son de acumulación.
 6. Sexan X e Y subconxuntos de $\mathbb{R}^p$. Se X e Y son convexos (resp., conexos), a súa intersección, $X \cap Y$, tamén.

Exercicios complementarios

- C.1 Sexan C_1 e C_2 as circunferencias en $\mathbb{R}^2$ de centro a orixe e raios 1 e 3 respectivamente. Sexa $E = \{(2+t)(\cos \frac{2\pi t}{1-|t|}, \sin \frac{2\pi t}{1-|t|}), -1 < t < 1\}$. Demostrate que o conxunto

$$X = C_1 \cup E \cup C_3$$

é compacto e conexo.

- C.2 Sexa C_n a circunferencia en $\mathbb{R}^2$ de centro o punto $(2 - 3/2^n, 0)$ e raio $1/2^n$. Estudade o carácter compacto e conexo do conxunto $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

- C.3 Sexan K_n , $n \in \mathbb{N}$, conxuntos compactos en $\mathbb{R}^p$. Supoñamos que teñen un punto x_0 común,

$$x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

Supoñamos que os seus diámetros converxen a cero,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(K_n) = 0.$$

Demostrate que a súa unión,

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n,$$

é un conxunto compacto.

- C.4 1. Demostrate que a composición de aplicacións lipschitzianas é unha aplicación lipschitziana.
2. Sexan $f, g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ dúas aplicacións lipschitzianas. Demostrate que a súa suma,

$$f + g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q,$$

dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, é tamén lipschitziana.

- C.5 Estudade a continuidade da función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (|x|, y + 1) & \text{se } y \geq |x|, \\ (x^2, 3x + 1) & \text{se } y < |x|. \end{cases}$$