

1. Sexa

$$E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/m, y = 1/m + 1/n, 1 \leq m \leq n\},$$

e

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

- (a) ¿É $(0, 0)$ punto de acumulación de E ? ¿Hai algún punto de acumulación diferente do $(0, 0)$?
 (b) Constrúe para cada punto de acumulación que teñas encontrado unha sucesión de puntos de E converxendo a el.

(2 puntos)

2. Sexa M un espazo métrico. Dado un subconxunto $E \subset M$, denótase E' o conxunto dos puntos de acumulación de E (conxunto derivado).

- (a) Proba a implicación

$$A \subset B \Rightarrow A' \subset B'.$$

- (b) Sexa
- E
- un subconxunto de
- M
- ,
- $x \in M$
- e
- $r > 0$
- . Demostra

$$B_M(x, r) \cap E' \neq \emptyset \Rightarrow (B_M(x, r) - \{x\}) \cap E \neq \emptyset.$$

- (c) Proba a igualdade

$$(E \cup E')' = E'.$$

- (d) Conclúe que
- $E \cup E'$
- é a adherencia de
- E
- .

(4 puntos)

Esta cuestión, así formulada, non corresponde ao programa actual. Pero é válida en calquera espazo X , na terminoloxía do curso.

3. Considera en $\mathbb{R}^2$ a métrica euclidiana. Sexa $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a función dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x - y, x + y) & \text{se } xy > 0, \\ (x + y, y - x) & \text{se } xy \leq 0. \end{cases}$$

Estudia a continuidade da función.

(2 puntos)

4. Considera o espazo

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\},$$

subespacio de $\mathbb{R}^2$ coa métrica euclidiana. Estudia a compacidade e conexidade dos seguintes subconxuntos de X :

$$A = \{(x, y) \in X \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in X \mid 1 \leq x \leq 2, y = \frac{x+n}{n+1}, n = 1, 2, 3, 4\}.$$

(2 puntos)

1. Observade que cada conxunto E_n é un subconxunto da recta $y = x + 1/n$, e ten exactamente n puntos.

$\{(1/n, 2/n)\}$ é unha sucesión de puntos de E que converxe a $(0, 0)$, logo este é un punto de acumulación.

$\{(1/m, 1/m + 1/n)\}$ é unha sucesión de puntos de E que converxe a $(1/m, 1/m)$, logo cada un destes puntos $(1/m, 1/m)$, $m \in \mathbb{N}$, é un punto de acumulación.

Non hai máis puntos de acumulación, pois nos seguintes conxuntos abertos de $\mathbb{R}^2$ ou non hai puntos de E ou hai soamente un número finito:

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1/n \text{ ou } x \neq 0\},$$

$$U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\},$$

$$U_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x + a\}, \quad a > 0.$$

3. Consideremos os subconxuntos $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$ e $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\}$. As restriccións de f a U e V son claramente continuas: para comprobalo abonda compor coas proxeccións. Como U e V son conxuntos abertos, a función será continua nos seus puntos. Consideremos agora as seguintes sucesións converxentes e as súas imaxes:

$$\begin{aligned} x > 0; \quad \{(x, 1/n)\} &\rightarrow (x, 0), \\ \{f(x, 1/n)\} &= \{(x - 1/n, x + 1/n)\} \rightarrow (x, x) \neq f(x, 0). \end{aligned}$$

$$x < 0; \{(x, -1/n)\} \rightarrow (x, 0), \\ \{f(x, -1/n)\} = \{(x + 1/n, x - 1/n)\} \rightarrow (x, x) \neq f(x, 0).$$

$$y > 0; \{(1/n, y)\} \rightarrow (0, y), \\ \{f(1/n, y)\} = \{(1/n - y, y + 1/n)\} \rightarrow (-y, y) \neq f(0, y).$$

$$y < 0; \{(-1/n, y)\} \rightarrow (0, y), \\ \{f(-1/n, y)\} = \{(-1/n - y, y - 1/n)\} \rightarrow (-y, y) \neq f(0, y).$$

Xa que logo, a función non é continua nos puntos (x, y) con $xy = 0$ diferentes do $(0, 0)$. Para este punto é doado comprobar directamente a definición de continuidade, pois $\|f(x, y)\| = \sqrt{2}\|(x, y)\|$ e, logo, dado $\varepsilon > 0$, abonda tomar $\delta = \varepsilon/\sqrt{2}$.

-
4. A non é pechado en $\mathbb{R}^2$, pois $(0, 1)$ e $(0, -1)$ son puntos de acumulación que non pertencen a A . Logo, A non é compacto. Tampouco é conexo: os conxuntos $\{(x, y) \in X \mid x > 0\}$ e $\{(x, y) \in X \mid x < 0\}$ definen unha separación non trivial de A .

B é unión dos conxuntos

$$B_i = \{(x, y) \in X \mid 1 \leq x \leq 2, y = \frac{x+i}{i+1}\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

A primeira proxección define un homeomorfismo entre cada un destes conxuntos e o intervalo pechado $[1, 2]$. Logo, cada B_i é pechado e conexo. Así, B é compacto, por ser unión finita de compactos.

O punto $(1, 1)$ pertence a cada B_i , logo B é conexo por ser unión de conxuntos conexos cun punto en común.