

A pregunta 1, teórica, adáptase ao programa substituíndo espazos métricos M e N por espazos X e Y , na terminoloxía do curso.

Enunciado _____ **Xuño de 1998**

1. Sexan M e N espazos métricos, $f: M \rightarrow N$ unha función. Partindo das definicións, demostra a equivalencia das dúas condicións seguintes:

- (a) A función f é continua.
- (b) A imaxe recíproca por f de toda bola aberta de N é un conxunto aberto.

2. Considera o espacio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$ e o subespacio

$$E = \{(x, y) \in X \mid x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Sexa $f: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ a función dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } y \leq x \\ \frac{x}{y} \cdot (x, y) & \text{se } 0 < x \leq y \end{cases}$$

- (a) Sexa $\{(x_n, y_n)\}$ unha sucesión en E que converxe a $(0, 0)$. Demostra que a sucesión imaxe $\{f(x_n, y_n)\}$ tamén converxe a $(0, 0)$.
- (b) Demostra que f é continua.
- (c) Sexan $A = \{(x, y) \in E \mid x = 1/2\}$, $B = \{(x, y) \in E \mid y = 4\}$. Debuxa $f(A)$ e $f(B)$.
- (d) Pódese estender f a todo X ? En caso de resposta afirmativa, constrúe unha extensión.
- (e) De existir unha extensión, sería única?

... / ...

3. Considera o espacio $\mathcal{C}(I)$ de funcións reais continuas do intervalo unidade, coa métrica da converxencia uniforme.

(a) Sexa $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ a función $f(x) = x^2 + 1$. Descrebe graficamente a bola aberta de centro f e raio $1/3$.

(b) Sexa $t \in I$. Demostra que a función linear

$$av_t: \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R},$$

Fora de programa

dada por $av_t(f) = f(t)$, é continua.

(c) Dado $n \in \mathbb{N}$ e un número real s , $0 \leq s \leq n$, defínese o subconxunto

$$K_n^s = \{f \in \mathcal{C}(I) \mid f(s/n) \in [0, 1/n]\}.$$

Proba que cada conxunto K_n^s é fechado.

(d) Calcula o interior de K_n^s .

(e) Sexa agora, para $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n = \{f \in \mathcal{C}(I) \mid f(s/n) \in [0, 1/n], s = 0, 1, \dots, n\}.$$

Demostra que K_n é completo.

(f) É K_n compacto?

1. Supoñamos f contínua. Sexa $B_N(y, r)$ unha bola en N , $x \in f^{-1}(B_N(y, r))$. Trata-se de encontrar un $s > 0$ tal que

$$B_M(x, s) \subset f^{-1}(B_N(y, r)).$$

(Observe-se que non é necesariamente $y = f(x)$). Como $f(x) \in B_N(y, r)$, existe un $t > 0$ tal que

$$B_N(f(x), t) \subset B_N(y, r).$$

Pola continuidade de f en x , existe un $s > 0$ tal que

$$f(B_M(x, s)) \subset B_N(f(x), t),$$

logo $f(B_M(x, s)) \subset B_N(y, r)$.

Reciprocamente, sexa $x \in M$, $y = f(x)$. Dada unha bola aberta $B_N(y, r)$ de centro y , trata-se de encontrar unha bola aberta de centro x , $B_M(x, s)$, tal que

$$f(B_M(x, s)) \subset B_N(y, r).$$

Agora, xa que, por hipótese, $f^{-1}(B_N(y, r))$ é un conxunto aberto e $x \in f^{-1}(B_N(y, r))$, existe un $s > 0$ tal que

$$B_M(x, s) \subset f^{-1}(B_N(y, r)).$$

2. (a) Sexa $\{(x_n, y_n)\}$ unha sucesión en E que converxe a $(0, 0)$, ou sexa, tal que $\{x_n\}$ converxe a cero e $\{y_n\}$ tamén. Denotemos a sucesión imaxe por $\{f(x_n, y_n)\} = \{(s_n, t_n)\}$. Esta sucesión converxe a $(0, 0)$, pois cada sucesión $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ converxe a cero. Con efecto, tal como está definida a función, sempre $s_n \leq x_n$ e $t_n \leq y_n$, pois, no caso de non seren iguais, ten-se $x \leq y$, i.e., $x/y \leq 1$.
- (b) Por continuidade secuencial, do apartado 1) deduce-se que f é contínua no punto $(0, 0)$. Consideremos o subconxunto aberto $E - \{(0, 0)\}$ de E . A función restrinxida a este aberto é contínua, pois é combinada de dúas contínuas definidas nos subconxuntos fechados de $E - \{(0, 0)\}$: $\{(x, y) \in E - \{(0, 0)\} \mid x \leq y\}$ e $\{(x, y) \in E - \{(0, 0)\} \mid x \geq y\}$. Por ser $E - \{(0, 0)\}$ aberto, a función f será contínua nos seus puntos, logo, globalmente contínua.

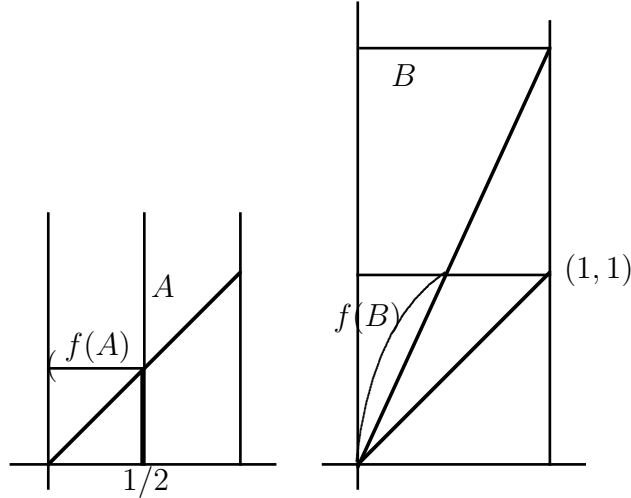


Figura 1: $f(A)$ e $f(B)$

- (c) Ver Figura 1.
- (d) Sexa $(0, y)$, $y \neq 0$, un punto de X que non pertenza a E . A sucesión $\{(1/n, y)\}$ converge a $\{(0, y)\}$. Logo, calquera F extensión de f debe verificar

$$F((0, y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n, y).$$

Como y é un número fixo, maior que cero, a partires dun certo inteiro todos os números da forma $1/n$ serán menores que y . Neles a función toma o valor $(\frac{1}{n^2 y}, 1/n)$, e ista sucesión converge a $(0, 0)$. Logo, de existir extensión, debe ser $F(0, y) = (0, 0)$. O mesmo argumento empregado antes permite concluir que a función F así definida é continua.

- (e) A extensión, como xa ficou claro no apartado anterior, é única, pois cada punto de $X - E$ é límite dunha sucesión de puntos de E . Ou sexa, porque E é denso en X .
3. (a) Ver Figura 2.
- (b) Como sabemos, para comprobar a continuidade dunha función linear entre espazos normados, digamos $h: V \rightarrow W$, abonda encontrar unha constante positiva k tal que, para todo $x \in V$, $\|h(x)\| \leq k \cdot \|x\|$. No noso caso esa

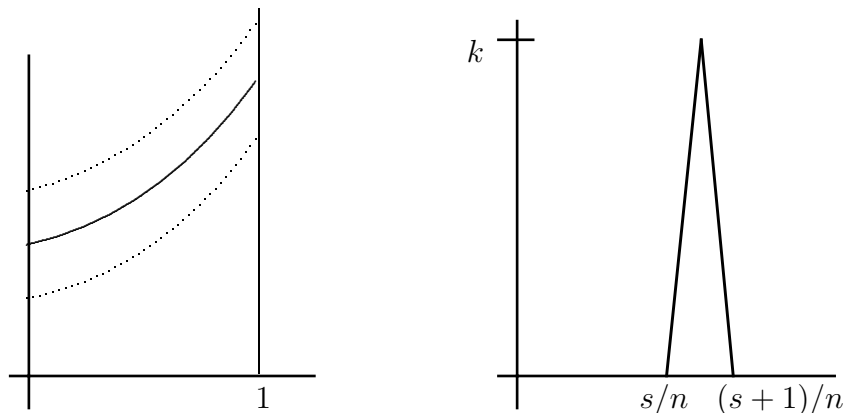


Figura 2: Bola e contraexemplo.

constante é 1:

$$|f(t)| = \|av_t(f)\| \leq \|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

(c) O subconxunto

$$K_n^s = \{f \in \mathcal{C}(I) \mid f(s/n) \in [0, 1/n]\}$$

é a imaxe recíproca de $[0, 1/n]$ pola función continua $av_{s/n}$, e, pois, fechado.

(d) O conxunto aberto $av_{s/n}^{-1}((0, 1/n))$ está contido en K_n^s , logo tamén no seu interior. Ningun outro punto de K_n^s é interior: se unha función de K_n^s acada en s/n o valor 0 ou o valor $1/n$, non pode estar no interior, pois en toda bola de centro tal función existirán funcións que, no punto s/n , tomen valores próximos a 0, nun caso, ou a $1/n$, no outro, e inferiores ou, respectivamente, superiores.

(e) Ten-se

$$K_n = \bigcap_{s=1}^n K_n^s,$$

logo é fechado. Como $\mathcal{C}(I)$ é completo, K_n , tamén.

(f) K_n non é compacto, pois non é limitado. As funcións en K_n , fora dos puntos s/n , poden tomar valores tan grandes como se queira. Na Figura 2 indica-se un exemplo.