

1. Sexa $\{x_n\}$ unha sucesión de puntos en $\mathbb{R}^p$. Sexa $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ o conxunto de puntos da sucesión. Sexa A' o conxunto derivado de A .

- (a) i. ¿Pode ser $A' = \emptyset$?
ii. ¿Pode ter A' un único punto?
iii. ¿Pode ter A' un número finito de puntos maior que 1?

En caso de resposta afirmativa, pon algún exemplo. Noutro caso, razoa a resposta.

- (b) Supón agora que a sucesión $\{x_n\}$ é de Cauchy, e volve a contestar as preguntas anteriores neste caso particular, poñendo tamén exemplos no caso de resposta afirmativa, e razoando as negativas.
(c) Considera a sucesión en $\mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$x_n = \begin{cases} k + \frac{1}{n} & \text{se } n = k^s, s \geq 1, \text{ sendo } k \text{ un número primo,} \\ n & \text{se } n \text{ non é potencia dun número primo.} \end{cases}$$

Comproba que todo número primo é punto de acumulación de A .

(2,25 puntos)

2. Considera a seguinte función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{cases} (y, y^2/x) & \text{se } xy > 0, \\ (x^2/y, x) & \text{se } xy < 0, \\ (0, 0) & \text{se } xy = 0. \end{cases}$$

- (a) Estudia a converxencia das sucesións $\{f(1, 1/n)\}$ e $\{f(1, -1/n)\}$.
(b) Estudia a continuidade da función.

(2,25 puntos)

3. Demostra que un conxunto é aberto se e soamente se é unión de bolas abertas.

(2 puntos)

4. (a) Sexa $X \subset \mathbb{R}^p$ un espazo compacto e conexo. Sexa $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ unha función continua. Probade que a súa imaxe $f(X)$ é compacta. ¿É conexa?
(b) Probade que o espazo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

é compacto e conexo.

- (c) Considerade a función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

e mostrade que $f(A)$ é un intervalo pechado. ¿É esta unha propiedade específica do exemplo, ou ben calquera das funcións f do primeiro apartado ten esta propiedade?

- (d) Determinade se $B = A - \{(0, 0)\}$ é compacto e conexo.

(3,5 puntos)

1. (a) i. Si, por exemplo, $x_n = n$.
- ii. Si, por exemplo, $x_n = 1/n$. Neste caso, $A' = \{0\}$. Efectivamente, 0 é punto de acumulación de A , ao ser límite dunha sucesión de puntos de A todos diferentes del (Proposición 3.13). Non pode haber outro, pois habería unha subsucesión converxendo a este novo punto de acumulación (Proposición 3.21), pero unha subsucesión dunha sucesión converxente converxe necesariamente ao límite da sucesión de partida (Lema 3.7).
- iii. Si, por exemplo,

$$x_n = \begin{cases} 1/n & \text{se } n \text{ par} \\ 1 + 1/n & \text{se } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Neste caso, as subsucesións $\{y_s\}$ e $\{z_s\}$ dadas por

$$y_s = \left\{ \frac{1}{2s} \right\}, \quad z_s = \left\{ 1 + \frac{1}{2s-1} \right\}$$

son converxentes, $\{y_s\} \rightarrow 0$, $\{z_s\} \rightarrow 1$. Logo $0, 1 \in A'$. Ademais,

$$A = \{y_s, s \in \mathbb{N}\} \cup \{z_s, s \in \mathbb{N}\},$$

e $A = \{0, 1\}$.

- (b) i. Si. Unha sucesión constante, $x_n = x$ para todo n , é de Cauchy e, sendo $A = \{x\}$, $A' = \emptyset$.
- ii. Si. A sucesión dada na resposta (a) – ii é de Cauchy.
- iii. Non. Se o conxunto de puntos dunha sucesión de Cauchy ten un punto de acumulación, a sucesión converxe a este punto (Corolario 3.22). Logo toda subsucesión converxe a el. Pero se houbera outro punto de acumulación, existiría unha subsucesión que converxería a este punto.

(c) Sexa k un número primo. A subsucesión de termo s -ésimo

$$y_s = k + \frac{1}{k^s}$$

converxe a k .

2. (a) $f(1, 1/n) = (1/n, 1/n)$ e $\{(1/n, 1/n)\} \rightarrow (0, 0)$.
 $f(1, -1/n) = (-n, 1)$ e $\{(-n, 1)\}$ non converxe.

(b) Os conxuntos

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}, \text{ e } V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\}$$

son abertos. Certamente, se $(x, y) \in U$, tomando $r = \min\{|x|, |y|\}$, a bola $B_2((x, y), r)$ está completamente contida en U . Analogamente para V .

$f|_U: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ son funcións continuas. Para comprobalo, abonda verificar a continuidade das súas composicións con cada proxección $pr_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Por exemplo,

$$pr_1 \circ (f|_V) = \frac{(pr_1|_V)^2}{pr_2|_V},$$

función definida mediante operacións aritméticas de funcións reais continuas. Como U e V son abertos, f é continua nos puntos de $U \cup V$.

Estudiemus agora a continuidade nun punto da forma $(x, 0)$, con $x > 0$. A sucesión $\{(x, -1/n)\}$ converxe a $(x, 0)$. A sucesión imaxe, $\{(-nx^2, x)\}$, non converxe. Logo a función non é continua nestes puntos.

Tomemos agora $(x, 0)$, con $x < 0$. A sucesión $\{(x, 1/n)\}$ converge ao punto $(x, 0)$. A sucesión imaxe, $\{(nx^2, x)\}$, non converge. Logo a función non é continua nestes puntos.

De forma análoga compróbase que a función tampouco é continua nos puntos $(0, y)$, con $y \neq 0$.

Para o punto $(0, 0)$ consideramos a sucesión $\{(1/n^2, 1/n)\}$. A súa imaxe converge ao punto $(0, 1)$. Logo a función tampouco é continua no $(0, 0)$.

4. (b) A é pechado, pois é a intersección da bola pechada $B_2[(0, 0), 1]$ e do conxunto pechado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$. Por estar contido nesa bola, A é limitado. Sendo pechado e limitado en $\mathbb{R}^2$, é compacto.

Vexamos agora que é conexo. Escribiremos

$$A = A_1 \cup A_2,$$

onde cada A_i , $i = 1, 2$, será un conxunto conexo e terán un punto en común. Fagamos

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\} \cap B_2[(0, 0), 1],$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0\} \cap B_2[(0, 0), 1].$$

Cada conxunto A_i é intersección de dous conxuntos convexos, logo son convexos e, pois, conexos, e teñen en común o punto $(0, 0)$.

- (c) Obviamente $f(A) \subset [0, 1]$. Dado $t \in [0, 1]$, o punto $(\sqrt{t}, 0)$ pertence a A e $f(\sqrt{t}, 0) = t$. Logo

$$f(A) = [0, 1].$$

A imaxe continua dun conxunto compacto e conexo é un conxunto compacto e conexo. En $\mathbb{R}$ os conxuntos compactos e conexos son o baleiro, os conxuntos cun so punto e os intervalos pechados.

- (d) O punto $(0, 0)$ é un punto de acumulación de B : a sucesión $\{(1/n, 0)\}$ está contida en B e converge a $(0, 0)$. Logo B non é pechado e, pois, tampouco compacto.

Non é conexo: unha separación non trivial de B vén definida polos conxuntos $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ e $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$.